PROVA EXTRAMUROS - 2017

NOME: ____

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): ______________________________

ASSINATURA: ____

Instruções

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) A Parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total da prova.

(iii) Cada questão de múltipla escolha (Parte II) vale 5 pontos.

BOA PROVA!

Transcreva aqui as respostas da Parte II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	
10		11		12	
13		14		15	

Parte I: Questões dissertativas

Questão 1. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que existe $0 \leq \theta < 1$ satisfazendo

$$|f(x) - f(y)| \leq \theta |x - y| \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Considere a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + f(x)$ e mostre que:

(I) g é uma função contínua.

(II) g é uma função injetora.

(III) g é uma função sobrejetora.

(IV) g^{-1} é uma função contínua.

Questão 2. Considere o conjunto $\mathbb{Q}_{>0} = \{r \in \mathbb{Q};\ r > 0\}$. Mostre que:

(I) O grupo multiplicativo $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$ é gerado pelo conjunto dos primos.

(II) O grupo aditivo $(\mathbb{Z}[X], +)$ é isomorfo ao grupo multiplicativo $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$.

Parte II: Questões de múltipla escolha

Questão 1. Indique a afirmação **FALSA**:

(a) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Dados quaisquer x_1, x_2 em $[a, b]$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(A) \subset \mathbb{R}$ é aberto sempre que $A \subset \mathbb{R}$ é aberto. Então f é injetiva.

(c) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L_2$. Então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

(d) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas com $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$

(e) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Se f'' é limitada, então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 2. Indique a afirmação **FALSA**:

(a) Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$ para todo $x \in [0, 1]$, então f é identicamente nula em $[0, 1]$.

(b) Seja $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in]0, \infty[$. Então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \ln(x)$.

(c) Sejam $f_n, f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Então $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

(d) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana (i.e. existe $\lambda > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$). Se $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula, então $f(X)$ tem medida nula.

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $x_n = \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \int_1^n \frac{1}{x}dx$. Então a sequência (x_n) é convergente.

Questão 3. Indique a afirmação **FALSA**:

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Seja $(x_n) \subset \mathbb{R}$ uma sequência de pontos distintos, com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e tal que $f(x_n) = 0$ para todo n. Então $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$.

(b) Se $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ é derivável e uniformemente contínua, então f' é limitada em $]a, b[$.

(c) Sejam a, b e c números reais positivos. Então

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{a^h + b^h + c^h}{3} \right)^{1/h} = \sqrt[3]{abc}\,.$$

(d) Para a, b e c constantes, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se f tem um mínimo local, então f também tem um máximo local.

(e) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e assume apenas um número finito de valores, então f é constante.

Questão 4. Indique a afirmação **FALSA**:

(a) Se $A \subset \mathbb{R}$ é não enumerável, então A tem pelo menos um ponto de acumulação.

(b) Seja $S \subset \mathbb{R}$ não vazio. Então existe uma sequência (x_n) em S tal que todo elemento de S é limite de alguma subsequência de (x_n).

(c) Seja (x_n) uma sequência de números reais que contém ao menos uma subsequência convergente e tal que toda subsequência convergente converge para o mesmo ponto. Então a sequência (x_n) é convergente.

(d) Seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto e não vazio. Então A pode ser escrito como uma união disjunta de intervalos abertos.

(e) Seja $S \subset \mathbb{R}$ com pelo menos um ponto de acumulação. Se $x + y \in S$ e $x - y \in S$ para quaisquer $x, y \in S$, então S é denso em $\mathbb{R}$.

Lembre-se: Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se existe uma sequência (x_n) em $A\backslash\{L\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.

Questão 5. Sabemos que existe uma série de potências tal que

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ com valor absoluto suficientemente pequeno. Considere as afirmações:

(I) Esta série de potências converge para todo $x \in \,]-1, 1[$.

(II) Temos que $a_{573} - 3a_{572} + 2a_{571} = 0$.

(III) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/2$.

(IV) Temos que

$$-\ln|x-1| - \ln|x-2| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

para todo número real x com valor absoluto suficientemente pequeno.

(V) Temos que $2a_{342} - 3a_{341} + a_{340} = 0$.

Quais das afirmações acima são **FALSAS**?

(a) (III) e (V)

(b) (II), (III) e (IV)

(c) (I) e (IV)

(d) (II) e (III)

(e) (I), (II) e (IV)

Questão 6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos reais e $T : V \to V$ um operador linear real tal que $T^2 = T - \mathrm{I}$, onde I denota o operador identidade de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) O polinômio característico de T, na variável t, é necessariamente $t^2 - t + 1$.

(II) O polinômio minimal de T, na variável t, é $t^2 - t + 1$.

(III) T é diagonalizável.

(IV) T é nilpotente, isto é, existe um inteiro $\kappa > 0$ tal que $T^\kappa = 0$.

(V) Existe um inteiro $\ell > 0$ tal que $T^\ell = \mathrm{I}$.

Assinale a alternativa **CORRETA**:

(a) (I), (II) e (IV) são verdadeiras

(b) (II), (III) e (V) são verdadeiras.

(c) (I) é verdadeira, (IV) e (V) são falsas.

(d) (V) é verdadeira, (III) e (IV) são falsas.

(e) (V) é verdadeira, (II) e (III) são falsas.

Questão 7. Seja M a matriz de ordem 1000 com entradas todas iguais a 1. Assinale a alternativa que fornece o polinômio característico de M na variável t:

(a) $t^{1000} - 1$

(b) $t^{999}(t - 1000)$

(c) $t^{999}(t - 1)$

(d) $(t - 1)^{1000}$

(e) $t^{500}(t - 1000)^{500}$

Questão 8. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere o operador linear cuja matriz na base canônica de $\mathbb{R}^4$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1 & a_4 & a_5 & a_7 \\ a_1 & 1/\sqrt{2} & a_6 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & a_8 \end{pmatrix}.$$

Dentre as entradas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ (nesta ordem), apresentadas a seguir, qual delas garante que o operador é uma isometria?

(a) $0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 1$

(b) $1, 0, -1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, -1$

(c) $0, 0, 1, 0, 0, -1, 1, 1/\sqrt{2}$

(d) $1, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}, 0, 1$

(e) $0, 0, -1, 0, 0, 1, 1, -1/\sqrt{2}$

Questão 9. Seja $\Delta := \big\{(p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{R}^3\,;\; p_i > 0, p_1+p_2+p_3 = 1\big\}$ o interior de um 2-simplexo. Dados $p = (p_1,p_2,p_3), q = (q_1,q_2,q_3) \in \Delta$ e dado $r \in \mathbb{R}$, definimos

$$p \uplus q := \frac{(p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3)}{p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3}, \quad r \odot p := \frac{(p_1^r, p_2^r, p_3^r)}{p_1^r+p_2^r+p_3^r}.$$

Munido de tais operações, Δ é um espaço vetorial real.

Seja $S = \big\{(t/2, t/2, 1-t) \in \Delta\,;\; t \in]0,1[\big\}$ a interseção de Δ com a reta (usual) passando pelos pontos $(0,0,1)$ e $(1/2,1/2,0)$. Indique a alternativa **CORRETA**:

(a) S não é um subespaço unidimensional de Δ e, além disso, não há nenhum subespaço unidimensional de Δ que esteja contido em uma reta (usual) de $\mathbb{R}^3$.

(b) S não é um subespaço unidimensional de Δ, mas existe pelo menos um subespaço unidimensional de Δ contido em uma reta (usual) de $\mathbb{R}^3$.

(c) S é um subespaço unidimensional de Δ e é o único subespaço unidimensional de Δ que está contido em uma reta (usual) de $\mathbb{R}^3$.

(d) S é um subespaço unidimensional de Δ e, além disso, existe exatamente mais um subespaço unidimensional de Δ distinto de S que está contido em uma reta (usual) de $\mathbb{R}^3$.

(e) S é um subespaço unidimensional de Δ e, além disso, existem pelo menos outros dois subespaços unidimensionais de Δ, distintos entre si e distintos de S, cada qual contido em uma reta (usual) de $\mathbb{R}^3$.

Questão 10. Seja $C([-\pi,\pi]) := \big\{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\,;\; f \text{ é contínua}\big\}$ o conjunto das funções contínuas do intervalo fechado $[-\pi,\pi]$ para a reta real. Colocamos em $C([-\pi,\pi])$ a estrutura de espaço vetorial real dada por $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ e $(r\cdot f)(x) := r\cdot f(x)$ para todos $f,g \in C([-\pi,\pi])$ e $r \in \mathbb{R}$. Finalmente, introduzimos em $C([-\pi,\pi])$ o produto interno $\langle f,g\rangle := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.

Sejam $W_1, W_2, W_3, W_4 \subset C([-\pi,\pi])$ os seguintes subespaços:

W_1 é gerado pelas funções $\operatorname{sen}^2(x)$, $\operatorname{sen}(2x)$, $\cos^2(x)$, $\cos(2x)$
W_2 é gerado pelas funções 1, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$
W_3 é gerado pela função $\operatorname{sen}(x)$
W_4 é gerado pela função $\cos(x)$.

Assinale a alternativa que fornece as dimensões de W_1, W_2, W_1+W_2 e o ângulo $\theta \in [0,\pi/2]$ entre os subespaços unidimensionais W_3 e W_4 :

(a) $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1+W_2) = 6$, $\theta = 0$

(b) $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1+W_2) = 5$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(c) $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 2$, $\dim(W_1+W_2) = 4$, $\theta = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{2}\pi}$

(d) $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 3$, $\dim(W_1+W_2) = 4$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(e) $\dim W_1 = 3$, $\dim W_2 = 2$, $\dim(W_1+W_2) = 5$, $\theta = 0$

Questão 11. Seja p um primo e $\mathbb{F}_p$ o corpo finito de p elementos. Para $n \geq 2$ e $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$, seja $T \leq G$ o subgrupo das matrizes triangulares superiores, com as entradas da diagonal principal iguais a 1. Denote por $N_G(T)$ o normalizador de T em G. Assinale a alternativa **CORRETA**:

(a) $|T| = p^{n(n-1)/2}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)/2}$.

(b) $|T| = p^{n(n-1)/2}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n}p^{n(n-1)/2}$.

(c) $|T| = p^{n(n-1)}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)/2}$.

(d) $|T| = p^{n(n-1)/2}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)}$.

(e) $|T| = p^{n(n-1)}$ e $|N_G(T)| = (p-1)^{n-1}p^{n(n-1)}$.

Questão 12. Seja S_n o grupo das permutações de n letras. Indique a afirmação **FALSA**:

(a) S_{16} tem um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times S_3$.

(b) S_{16} tem pelo menos dois subgrupos isomorfos a $S_7 \times S_9$.

(c) S_{16} tem um subgrupo isomorfo a $S_{13} \times S_3$.

(d) S_{16} é isomorfo a um subgrupo de $GL_{17}(\mathbb{F}_p)$.

(e) S_{16} é isomorfo a um subgrupo de A_{17}.

Questão 13. Sabendo que 2017 é primo, considere o anel

$$A = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}\,;\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } 2017 \nmid n \right\}.$$

Indique a afirmação **CORRETA**:

(a) A tem um número infinito de ideais maximais.

(b) A tem um número finito de ideais.

(c) A tem um número finito de ideais maximais e um número infinito de ideais primos.

(d) A tem apenas um ideal maximal.

(e) A tem apenas dois ideais maximais.

Questão 14. Indique a afirmação **FALSA**:

(a) Todo grupo cíclico de ordem 24 tem 8 subgrupos.

(b) Para todo n, existe um homomorfismo injetor de S_n em $GL_n(\mathbb{R})$.

(c) Existe um homomorfismo sobrejetor de S_3 em $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(d) Para todo n, o grupo S_n pode ser gerado por quatro elementos.

(e) $S_3 \cong GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Questão 15. Seja $\langle 13, X^2 \rangle$ o ideal de $\mathbb{Z}[X]$ definido por

$$\langle 13, X^2 \rangle := \left\{ 13 \cdot r(X) + X^2 \cdot s(X) \,; \;\; r(X), s(X) \in \mathbb{Z}[X] \right\}.$$

Quantos homomorfismos de anéis $\varphi : \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[X]/\langle 13, X^2 \rangle$ existem?

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 13

(e) 13^2

Lembre-se: Um homomorfismo de anéis não necessariamente preserva o elemento neutro da multiplicação.