Gabarito da Prova Extramuros - 2015

NOME: ____

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): ____________________

ASSINATURA: ____________________________________

Instruções

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) A parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total.

BOA PROVA!

Respostas da Parte II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1	**d**	2	**e**	3	**e**
4	**b**	5	**a**	6	**d**
7	**e**	8	**c**	9	**a**
10	**d**	11	**c**	12	**a**
13	**b**	14	**c**	15	**b**

Parte I: Questões dissertativas

Questão 1. Mostre que não existe função diferenciável $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x)| < \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad f'(x) \cdot f(x) \geq \cos x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resolução. Suponhamos, por contradição, que exista tal função. Então

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}f(x)^2 = f'(x) \cdot f(x) \geq \cos x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Integrando em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *obtemos*

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 2\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0)^2 \geq 2,$$

o que implica

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \geq \sqrt{2},$$

contradizendo a hipótese.

Questão 2. Seja G um grupo abeliano. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $g \in G$, a equação $x^n = g$ possua solução em x (por exemplo, $G = (\mathbb{Q}, +)$ possui tal propriedade). Mostre que se H é um subgrupo de G tal que $[G : H] < \infty$ (índice finito), então $H = G$.

Resolução. Sejam $n = [G : H] < \infty$ e g um elemento qualquer de G. Por hipótese, existe $x \in G$tal que $x^n = g$. Como o grupo quociente G/H tem ordem n e é abeliano, temos

$$gH = x^n H = (xH)^n = H.$$

Assim, $g \in H$; logo $G \subseteq H$ e, consequentemente, $G = H$.

Parte II: Questões de múltipla escolha

Questão 1. Seja S_5 o grupo simétrico, cujos elementos são as permutações de $1, 2, 3, 4, 5$ com a operação de composição. A maior ordem que uma permutação em S_5 pode ter é

(a) $4! = 24$

(b) $5! = 120$

(c) 5

(d) 6 (Resposta)

(e) $4!/2 = 12$

Questão 2. Seja $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Sobre a série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{H_n}$$

podemos afirmar

(a) a série converge para um número entre 0 e 2

(b) a série converge para um número entre 3 e 5

(c) a série converge para um número entre 8 e 10

(d) a série converge para um número entre 11 e 13

(e) a série diverge (Resposta)

Questão 3. Seja V o $\mathbb{R}$-espaço vetorial dos polinômios $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ com grau ≤ 15. Seja W o subespaço dado por

$$W = \left\{ p(x) \in V \;\middle|\; \int_0^3 p(x)dx = 0 \text{ e } p'(3) = 0 \right\}$$

Então $\dim_{\mathbb{R}} W$ é igual a

(a) 2

(b) 3

(c) 9

(d) 10

(e) 14 (Resposta)

Questão 4. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer e sejam $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ números reais quaisquer. O conjunto que representa os pontos em que f é descontínua é

(a) $\displaystyle\bigcup_{\delta>0}\bigcap_{\epsilon>0}\Big\{a \in \mathbb{R} \;\Big|\; \big(a-\delta, a+\delta\big) \subset f^{-1}\Big(\big(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon\big)\Big)\Big\}$

(b) $\displaystyle\bigcup_{\epsilon>0}\bigcap_{\delta>0}\Big\{a \in \mathbb{R} \;\Big|\; \big(a-\delta, a+\delta\big) \not\subset f^{-1}\Big(\big(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon\big)\Big)\Big\}$ (Resposta)

(c) $\displaystyle\bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{\delta>0}\Big\{a \in \mathbb{R} \;\Big|\; \big(a-\delta, a+\delta\big) \not\subset f^{-1}\Big(\big(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon\big)\Big)\Big\}$

(d) $\displaystyle\bigcap_{\delta>0}\bigcup_{\epsilon>0}\Big\{a \in \mathbb{R} \;\Big|\; \big(a-\delta, a+\delta\big) \not\subset f^{-1}\Big(\big(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon\big)\Big)\Big\}$

(e) $\displaystyle\bigcup_{\delta>0}\bigcup_{\epsilon>0}\Big\{a \in \mathbb{R} \;\Big|\; \big(a-\delta, a+\delta\big) \subset f^{-1}\Big(\big(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon\big)\Big)\Big\}$

Questão 5. Seja p um primo. Dado um grupo finito G, dizemos que um subgrupo H é um p-*Sylow* se $|H| = p^n$ onde p^n é a maior potência de p que divide $|G|$. Seja $\mathbb{F}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ o corpo com 5 elementos (some e produto módulo 5) e seja $GL_3(\mathbb{F}_5)$ o grupo multiplicativo das matrizes 3×3 com entradas em $\mathbb{F}_5$ e determinante não nulo. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) Um 5-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_5)$ é o subgrupo

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{F}_5) \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{F}_5 \right\}. \text{ (\textit{Resposta})}$$

(b) Qualquer 5-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_5)$ possui 5^2 elementos.

(c) Um 5-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_5)$ é o subgrupo

$$H = \{A \in GL_3(\mathbb{F}_5) \mid \det A = \overline{1}\}.$$

(d) Qualquer 2-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_5)$ possui 2^5 elementos.

(e) $GL_3(\mathbb{F}_5)$ possui um único 5-Sylow.

Questão 6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. A seguir, temos uma prova de que $f(0) = 0$, em que omitimos algums termos.

> Por absurdo, suponha que $f(0) \neq 0$; substituindo f por $-f$ se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que $f(0) > 0$. Seja $0 < \delta < \pi/2$ tal que $|x| < \delta \implies \underline{\quad (1) \quad}$, que existe já que $\underline{\quad (2) \quad}$, e seja $\epsilon = \frac{2}{3}(1 - \cos\delta) > 0$ de modo que, para $x \in [-\pi, \pi]$ e $|x| > \delta$, temos $\underline{\quad (3) \quad}$. Seja ainda $\eta > 0$ tal que $\eta < \delta$ e $|x| < \eta \implies \cos x > 1 - \epsilon/2$. Com estas escolhas, temos
>
> $$\int_{-\delta}^{\delta}(\epsilon+\cos x)^n f(x)dx \geq \int_{-\eta}^{\eta}(\epsilon+\cos x)^n f(x)dx \geq 2\eta\cdot\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)^n\cdot\frac{f(0)}{2}$$
>
> e, além disso, que
>
> $$\begin{aligned} &\left|\int_{-\pi}^{-\delta}(\epsilon+\cos x)^n f(x)dx + \int_{\delta}^{\pi}(\epsilon+\cos x)^n f(x)dx\right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{-\delta}|\epsilon+\cos x|^n|f(x)|dx + \int_{\delta}^{\pi}|\epsilon+\cos x|^n|f(x)|dx \\ &\leq 2\pi\cdot\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^n\cdot\sup_{x\in[-\pi,\pi]}|f(x)| \end{aligned}$$
>
> de modo que
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(\epsilon+\cos x)^n f(x)dx = \underline{\quad (4) \quad}$$
>
> Mas como
>
> $$\begin{aligned} (\epsilon+\cos x)^n &= \left(\epsilon + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \\ &= \sum_{0\leq k\leq n} a_k\cdot\frac{e^{kix}+e^{-kix}}{2} = \sum_{0\leq k\leq n} a_k\cdot\cos kx \end{aligned}$$
>
> para certos $a_k \in \mathbb{R}$, temos que a integral no limite acima é igual a 0 pela hipótese inicial, uma contradição.

Qual das alternativas a seguir completa a prova corretamente?

(a) (1) $f(x) \leq f(0)$; (2) $f(0) > 0$; (3) $1 - \cos x > 3\epsilon/2$; (4) $-\infty$

(b) (1) $f(x) \leq f(0)$; (2) f é contínua; (3) $\epsilon/2 + \cos x > 1$; (4) $+\infty$

(c) (1) $f(x) > f(0)/2$; (2) $f(0) > 0$; (3) $|\epsilon + \cos x| < 1 - \epsilon/2$; (4) $-\infty$

(d) (1) $f(x) > f(0)/2$; (2) f é contínua; (3) $|\epsilon + \cos x| < 1 - \epsilon/2$; (4) $+\infty$ (Resposta)

(e) (1) $f(x) < f(0)/2$; (2) $f(0) > 0$; (3) $1-\cos x > 3\epsilon/2$; (4) $\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$

Questão 7. Seja $A \in M_5(\mathbb{C})$ (uma matriz 5×5 com entradas em $\mathbb{C}$). Suponha que $A^2 - 3A + 2I = 0$, sendo I a matriz identidade em $M_5(\mathbb{C})$. Podemos afirmar que

(a) A possui exatamente 5 autovalores distintos entre si

(b) $\det A = 0$

(c) $\operatorname{tr} A = 0$

(d) $\operatorname{tr} A + \det A = 3 + 2 = 5$

(e) os autovalores de A pertencem ao conjunto $\{1, 2\}$ (Resposta)

Questão 8. Seja G um grupo finito e $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ o conjunto de todos os homomorfismos de grupo $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$ em que $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é o grupo multiplicativo dos complexos não nulos. Então podemos afirmar que

(a) se $\chi \in \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ então $|\chi(g)| \leq 1/2$ para todo $g \in G$

(b) $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ é um conjunto infinito se G não é um grupo cíclico

(c) $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ é sempre finito (Resposta)

(d) $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ é finito se, e somente se, G é um grupo abeliano

(e) $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ é finito se, e somente se, G não possui subgrupos normais além de G e do subgrupo trivial

Questão 9. O limite

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^{\pi} e^{-r \cdot \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

é igual a

(a) 0 (Resposta)

(b) 1

(c) π

(d) ∞

(e) $\pi/2$

Questão 10. Quantos homomorfismos de anéis

$$f\colon \frac{\mathbb{Z}[x,y]}{(x^3+y^2-1)} \to \mathbb{Z}/(7)$$

existem?

(a) 2

(b) 3

(c) 5

(d) 11 (Resposta)

(e) infinitos

Questão 11. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(i) Se A é idempotente (i.e., $A^2 = A$) então $I - A$ é inversível e $I + A$ é não inversível.

(ii) Se A é antisimétrica (i.e., $A^t = -A$) então $I + A$ é inversível

(iii) Se A é antisimétrica e n é ímpar então $\det A = 0$.

Então são verdadeiras somente as afirmações

(a) (i) e (ii)

(b) (i) e (iii)

(c) (ii) e (iii) (Resposta)

(d) (i)

(e) (iii)

Questão 12. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A série $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge uniformente em $[2, \infty)$ (Resposta)

(b) A série $f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n x^n$ converge uniformente em $(-1, 1)$

(c) A série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi/6)}{n}$ converge absolutamente.

(d) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \operatorname{sen}^n(x)dx \neq \int_0^\pi \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}^n(x)dx$ pois a sequência $f_n(x) = \operatorname{sen}^n(x)$ não converge uniformente em $[0, \pi]$.

(e) Se $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ é uma sequência de funções diferenciáveis que converge uniformente para uma função f então f_n' também converge uniformente para f'.

Questão 13. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente, isto é, $A^k = 0$ para algum inteiro positivo k. Qual das afirmações a seguir é **falsa**?

(a) $I - A$ é uma matriz inversível

(b) A pode ter um autovalor não nulo (Resposta)

(c) $\operatorname{tr}(A) = 0$

(d) $\det(I + A) = 1$

(e) se A é simétrica então $A = 0$

Questão 14. A imagem de $\mathbb{Z}^2$ pela transformação linear dada na base canônica pela matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é um subgrupo de $\mathbb{Z}^2$ de índice

(a) 1

(b) 3

(c) 5 (Resposta)

(d) 6

(e) 7

Questão 15. Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(a) Se uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ é injetora então ela é necessariamente sobrejetora.

(b) O conjunto de todas as transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ sobrejetoras formam um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão 2. (Resposta)

(c) Se uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ não é injetora, então existe um $v \in \mathbb{R}^4$ não nulo tal que o produto interno $v \cdot T(w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^4$

(d) Se $T\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^{21}$ é uma transformação linear e $v_1, \ldots, v_7 \in \mathbb{R}^7$ são tais que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_7)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^{21}$ então $v_1, \ldots, v_7$ também são linearmente independentes em $\mathbb{R}^7$.

(e) Se uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ não é injetora, então pelo menos um autovalor de T é igual a 0.