Prova Extramuro

Nome: ______________________________

Identidade (Passaporte): ______________________________

Assinatura: ______________________________

INSTRUÇÕES

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) 25 porcento da pontuação total é da parte I (Perguntas dissertativas).

BOA PROVA!

RESPOSTAS DA PARTE II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1^a	d	7^a	a	13^a	d
2^a	b	8^a	d	14^a	e
3^a	c	9^a	d	15^a	a
4^a	d	10^a	e		
5^a	b	11^a	b		
6^a	c	12^a	c		

1 Parte I

1. Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Mostre que existem c, k tais que $|f(x)| \leq cx + k$.

2. Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f \in \mathcal{L}(E)$ uma transformação linear. Para todo $x \in E$ denotamos por P_x o polinômio mônico em $\mathbb{K}[X]$ com menor grau tal que $P_x(f)(x) = 0$ e definimos $E_x := \{P(f)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$. Mostre que

   (a) Para todo $x \in E, P_x$ existe e é único. Além disso, se $P(f)(x) = 0$ com $P \in \mathbb{K}[X]$ então $P_x | P$.

   (b) E_x é um subespaço vetorial de dimensão $\deg(P_x)$.

   (c) Se $E_x \cap E_y = \{0\}$, mostre que $P_{x+y} = mmc(P_x, P_y)$.

2 Parte II

Questão 1 *Sejam* (a_n) *e* (b_n) *sequências de reais positivos, tais que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. *Considere as afirmações*

(1) *Se* $\sum b_n$ *converge então* $c \leq 1$ *é condição necessária para a convergência de* $\sum a_n$.

(2) *Se* $\sum a_n$ *converge e* $c = 0$, *então* $\sum b_n$ *diverge.*

(3) *Se* $c = +\infty$, *então* $\sum a_n$ *diverge.*

Assinale a alternativa ***correta:***

(a) *Há exatamente duas afirmações verdadeiras.*

(b) *Apenas a afimação (1) é verdadeira.*

(c) *Apenas a afirmação (3) é verdadeira.*

(d) *(X) Todas as afirmações são falsas.*

Questão 2 *Indique qual das seguintes afirmações é* ***falsa.***

(a) *Sejam* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *conjuntos abertos de* $\mathbb{R}^d$. *Então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *é aberto.*

(b) *(X) Sejam* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *conjuntos fechados de* $\mathbb{R}^d$, *não-vazios, com* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, *então* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

(c) *Sejam* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *conjuntos fechados de* $\mathbb{R}^d$, *então* $\forall n \in \mathbf{N}$ *temos que* $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ *é fechado.*

(d) *Sejam* $K \neq \emptyset$ *conjunto compacto de* $\mathbb{R}^d$ *e* $c \in \mathbb{R}^d$. *Então sempre existe* $a \in K$ *tal que* $\|c - a\| = \sup\{\|c - x\|\,; x \in K\}$.

Questão 3 *Considere a função*

$$f_p(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad \text{onde } p \in \mathbb{R}.$$

Sejam $A = \{p \in \mathbb{R}; f_p \text{ é contínua}\}$ *e* $B = \{p \in \mathbb{R}; f_p \text{ é diferenciável}\}$.

Indique qual das seguintes afirmações é ***verdadeira.***

(a) $A \setminus B = \emptyset$.

(b) $\frac{1}{\pi} \notin A \setminus B$.

(c) *(X)* $A \setminus B$ *não é aberto nem fechado em* $\mathbb{R}$.

(d) $\sqrt{2} \in A \setminus B$.

Questão 4 *Considere a sequência de funções* (f_n), $f_n : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dadas por* $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$. *Defina* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *quando este limite existir. Considere as afirmações:*

(1) f *está bem definida em* $[0, 2]$ *e é descontínua.*

(2) (f_n) *converge uniformemente para* f.

(3) $\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\, dx = \int_0^2 f(x)\, dx$.

Indique a opção ***correta:***

a) *Apenas a afimação (1) é verdadeira.*

b) *Apenas a afimação (2) é verdadeira.*

c) *Apenas a afimação (1) é falsa.*

d) *(X)Apenas a afimação (2) é falsa.*

Questão 5 *O subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é isomorfo a

(a) S_4

(b) *(X)*D_3

(c) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(e) $S_3 \times S_3$

Questão 6 *Sobre a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada pela expressão*

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2 + y^2} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é possível afirmar que:

(a) A função f não é contínua.

(b) As derivadas parciais de f na origem existem mas não são contínuas. Por isso, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

(c) (X) As derivadas parciais de f na origem existem e são contínuas. Por isso, f é diferenciável em $(0, 0)$.

(d) As derivadas parciais de f na origem existem mas não são contínuas. Ainda assim, f é diferenciável em $(0, 0)$.

(e) As derivadas parciais de f na origem não existem. Por isso, f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Questão 7 *Seja $a_n \neq 0$ uma sequência crescente e limitada de números reais. Considere seguintes afirmações:*

- *A sequência a_n é convergente.*
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.
- *Mesmo supondo que $a_n \to 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode ser divergente.*
- *A série $\sum \frac{1}{a_n}$ sempre é divergente.*
- *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe $n \leq m \leq 2n$ tal que $a_m - a_n \leq \epsilon$.*

Quantas delas são falsas?

(a) (X)Uma

(b) Duas

(c) Três

(d) nenhuma

(e) Todas são falsas.

Questão 8 *Considere o grupo $GL_2(\mathbb{R})$ das matrizes inversíveis 2×2 com entradas reais. Qual dos seguintes subconjuntos **NÃO** é subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$?*

(a) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$

(b) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$

(c) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = I_2\}$

(d) (X) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$

(e) $\{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ é diagonal}\}$

Questão 9 *Seja G um grupo arbitrário e $a, b, c \in G$, qual das seguintes afirmações é correta?*

(a) A ordem de a não é necessariamente igual à ordem de a^{-1}.

(b) A ordem de ab não é necessariamente igual à ordem de ba.

(c) A ordem de abc não é necessariamente igual à ordem de bca.

(d) (X) Todos os itens acima são errados.

Questão 10 *Considere o grupo $G = (\mathbb{R}^2, +)$ e o subgrupo*

$$H = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Então as classes laterais de H são

(a) as retas paralelas ao eixo x

(b) as retas paralelas ao eixo y

(c) os círculos de centro na origem

(d) as retas paralelas à reta de equação $x + 3y = 0$

(e) (X) as retas de equação $3x - y = c$ com $c \in \mathbb{R}$

Questão 11 *Seja $\mathbb{R}[x]$ o anel dos polinômios com coeficientes reais. Então o anel quociente*

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2 + 2)}$$

é isomorfo ao anel

(a) $\mathbb{R}$

(b) (X) $\mathbf{C}$

(c) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(d) $\mathbb{R} \times \mathbf{C}$

(e) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Questão 12 *Sejam p um primo, $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o corpo finito com p elementos dos inteiros módulo p e F_p^* seu grupo multiplicativo. Seja $GL_n(\mathbf{C})$ o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas em $\mathbf{C}$. Se $f \colon F_p^* \to GL_n(\mathbf{C})$ é um morfismo de grupos, então podemos afirmar que*

(a) $ker(f)$ é necessariamente trivial

(b) todos os autovalores das matrizes em $Im(f)$ são reais

(c) (X) todos os autovalores das matrizes em $Im(f)$ são raízes da unidade

(d) $Im(f)$ é necessariamente trivial

(e) qualquer matriz em $Im(f)$ tem ordem p

Questão 13 *Considere a transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada na base canonica pela matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se C denotar o círculo fechado (com seu interior) de raio 1 e centro na orígem, a interseção $\bigcap_{n \geq 1} T^n(C)$ é:

(a) Um círculo

(b) Um quadrado

(c) o conjunto vazio

(d) (X) uma reta

(e) um ponto

Questão 14 *Se*

$$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

então

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)^2} + \frac{1}{(3n+2)^2}$$

vale

(a) $\pi^2/6$

(b) $\pi^4/7$

(c) $\pi^2/7$

(d) $\pi^2/27$

(e) (X) $4\pi^2/27$

Questão 15 *Sejam* $f, g\colon \mathbf{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. *Dizemos que* $g(n)$ ***cresce mais rápido do que*** $f(n)$, *em símbolos* $f(n) \ll g(n)$, *se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Assinale a alternativa correta:

(a) (X) $(1+1/n)^n \ll \log n \ll n^{2012} \ll 1.001^n \ll n!$

(b) $\log n \ll 1.001^n \ll (1+1/n)^n \ll n^{2012} \ll n!$

(c) $1.001^n \ll (1+1/n)^n \ll \log n \ll n! \ll n^{2012}$

(d) $\log n \ll n^{2012} \ll 1.001^n \ll (1+1/n)^n \ll n!$

(e) $\log n \ll (1+1/n)^n \ll n^{2012} \ll n! \ll 1.001^n$