Nome: ____

Identidade (Passaporte): ____

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) 25 porcento da pontuação total é da parte I (Perguntas dissertativas).

BOA PROVA!

RESPOSTAS DA PARTE II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1^a		7^a		13^a	
2^a		8^a		14^a	
3^a		9^a		15^a	
4^a		10^a		16^a	
5^a		11^a		17^a	
6^a		12^a		18^a	

Parte I: Questões dissertativas

Questão 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(c)$ seja um compacto não vazio.

(a) Mostre que existe $R > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ com $|x| > R$ ou $f(x) < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ com $|x| > R$.

(b) Prove que f possui um valor extremo (valor máximo absoluto ou mínimo absoluto).

(c) Apresente $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua para a qual exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(c)$ seja um compacto não vazio mas que não possui valor extremo.

Questão 2. Considere a sequência recorrente dada por

$$A_0 = 2, \quad A_1 = 4 \quad \text{e}$$

$$A_{n+2} = 4A_{n+1} - A_n \quad (n \geq 0),$$

de modo que seus primeiros termos são $2, 4, 14, 52, 194, \ldots$

(a) Prove que, para todo $n \geq 0$,

$$A_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n.$$

(b) Considere o subanel $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{R}$. Mostre que, no anel quociente $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/(17)$, temos

$$\overline{(2+\sqrt{3})}^{17} = \overline{2-\sqrt{3}}$$

e, analogamente, que

$$\overline{(2-\sqrt{3})}^{17} = \overline{2+\sqrt{3}}.$$

Aqui, $(17) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ é o ideal principal gerado por 17 e $\overline{\alpha}$ denota a classe de α no quociente $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]/(17)$.

(c) Qual o resto na divisão de A_{17} por 17?

Questão 1. Seja $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Assinale a alternativa falsa:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n^2 \log(n) = 0$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ é divergente.

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^2}{\log(n)}$ é uma série divergente.

Questão 2. Considere o grupo $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ com o produto usual de complexos e o subgrupo $\mathbb{R}_{>0}$ dos reais positivos. Então o grupo quociente $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_{>0}$ é isomorfo a

(a) $\mathbb{R}_{>0}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ com o produto usual de complexos.

(c) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (matrizes 2×2 inversíveis com o produto usual de matrizes).

(d) $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$.

(e) Nenhum dos anteriores.

Questão 3. Qual dos seguintes anéis **NÃO** é um corpo?

(a) $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$

(b) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$

(c) $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)$

(d) $\mathbb{Z}/(5)$

(e) $\mathbb{Z}/(101)$

Aqui, (a) denota o ideal principal gerado por a.

Questão 4. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. É correto afirmar que:

(a) A imagem de qualquer círculo em $\mathbb{R}^2$ pela matriz A é também um círculo.

(b) Para qualquer quadrado $Q \subset \mathbb{R}^2$, as áreas de Q e de $A(Q)$ coincidem.

(c) A imagem do conjunto $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ pela matriz A está **estritamente** contida em $\mathbb{Z}^2$.

(d) Existe um círculo em $\mathbb{R}^2$ cuja imagem pela matriz A é um círculo.

(e) Existe uma reta em $\mathbb{R}^2$ que não passa pela origem cuja imagem pela matriz A não é uma reta.

Questão 5. Qual das seguintes afirmações é falsa?

(a) Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais tal que $A^2 = 0$. Então A não é inversível.

(b) Seja $v_1, v_2, \ldots, v_n$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Seja A uma transformação linear injetiva. Então $A(v_1), A(v_2), \ldots, A(v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

(c) Qualquer conjunto de 4 vetores em $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.

(d) Se u, v, w são vetores linearmente independentes, então $u, u + v, u + w$ são vetores linearmente independentes.

(e) Seja $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto formado por vetores não-nulos. Existem pelo menos três vetores distintos em P tais que cada um destes vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais elementos de P.

Questão 6. Joãozinho escreveu em seu caderno a expressão

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1+1}{5+6} = \frac{2}{11}.$$

Sua professora disse que a expressão acima estava errada, ao que Joãozinho retrucou: "Não se estivermos trabalhando no corpo finito com p elementos." A afirmação de Joãozinho é correta para

(a) $p = 13$

(b) $p = 43$

(c) $p = 61$

(d) $p = 101$

(e) $p = 103$

Questão 7. Considere as seguintes afirmações:

1. Se a transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ for sobrejetiva, então $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) = 3$, onde $\mathrm{Nuc}(A)$ representa o núcleo de A.
2. Uma transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ nunca pode ser injetiva.
3. O posto da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ é independente de x.
4. Se A é uma matriz real, então A^2 possui algum autovalor ≥ 0.
5. Sejam A, B duas matrizes $n \times n$. Suponha que A possui n autovalores distintos, que B possui n autovalores distintos e que $AB = BA$. Então o conjunto de **autovetores** de A necessariamente coincide com o conjunto de **autovetores** de B.

Pode-se dizer que:

(a) A única afirmação falsa é a 3.

(b) As únicas afirmações falsas são 3 e 4.

(c) A única afirmação falsa é a 4.

(d) As únicas afirmações falsas são 3, 4 e 5.

(e) Todas as afirmações são falsas.

Questão 8. Sobre o limite $\displaystyle\lim_{h \to -\frac{1}{2}} \frac{\int_0^{1+2h} \mathrm{sen}(x^2)\,\mathrm{d}\,x}{(1+2h)^3}$ é possível afirmar que:

(a) Existe e vale 1/3.

(b) Existe e vale 2/3.

(c) Existe e vale 1/6.

(d) Não existe e tende a $+\infty$.

(e) Não existe e tende a $-\infty$.

Questão 9. Seja S_4 o grupo das permutações de $1, 2, 3, 4$ com a operação de composição. Então **NÃO** é um subgrupo normal

(a) $\{(1)\}$

(b) $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

(c) $\{\pi \in S_4 \mid \pi \text{ é uma permutação par}\}$

(d) S_4

(e) $\{\pi \in S_4 \mid \pi(4) = 4\}$

Questão 10. Seja $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Então $A^{2012} =$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Questão 11. Fixemos uma base em $\mathbb{R}^3$ e denotemos por $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ as coordenadas de $x \in \mathbb{R}^3$ nesta base. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. É correto afirmar que:

(a) A expressão $(x, y) \mapsto x^t M y$ (onde $x, y \in \mathbb{R}^3$ e x^t denota a matriz linha transposta a x) introduz em $\mathbb{R}^3$ um produto interno.

(b) M^n é a matriz identidade para algum $n \in \mathbb{N}$.

(c) A matriz M pode representar uma rotação em torno de uma reta em $\mathbb{R}^3$.

(d) Suponha que NM é uma reflexão em um subespaço linear bidimensional de $\mathbb{R}^3$ para uma certa matriz N. Então $\det N = -\dfrac{1}{2}$.

(e) Suponha que NM é uma reflexão em um subespaço linear unidimensional de $\mathbb{R}^3$ para uma certa matriz N. Então $\det N = -\dfrac{1}{2}$.

Questão 12. Qual das seguintes sequências de funções converge uniformemente em $[0, 1)$?

(a) $f_n(x) = x^n$

(b) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$

(c) $f_n(x) = x^n/n$

(d) $f_n(x) = (1 + n^2x^2)^{-1}$

(e) $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$

Questão 13. Seja

$$\mathbb{F}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$$

o corpo finito com 5 elementos, onde as operações são efetuadas módulo 5: por exemplo, $\overline{2}+\overline{4}=\overline{1}$, $\overline{2}\cdot\overline{4}=\overline{3}$ e $\overline{3}/\overline{2}=\overline{4}$. Considere o espaço vetorial

$$V = \{(a,b,c) \in \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5\}$$

de dimensão 3 sobre $\mathbb{F}_5$. Então V contém exatamente

(a) $3^5 = 243$ subespaços vetoriais de dimensão 1.

(b) $5^3 - 1 = 124$ subespaços vetoriais de dimensão 1.

(c) $(5^3 - 1)/(5-1) = 31$ subespaços vetoriais de dimensão 1.

(d) $5^2 = 25$ subespaços vetoriais de dimensão 1.

(e) $(5-1)^3 = 64$ subespaços vetoriais de dimensão 1.

Questão 14. Neste exercício, as afirmações são relativas à integral de Riemann. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Marque a alternativa falsa.

(a) Se f é contínua, então f é integrável.

(b) Se f é integrável, então $|f|$ é integrável.

(c) Se $|f|$ é integrável, então f é integrável.

(d) Se f^3 é integrável, então f é integrável.

(e) Se f é integrável, então $|f|^p$ é integrável para todo $p \geq 1$.

Questão 15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada contínua e

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 1\} \neq \emptyset.$$

Considere as seguintes afirmações:

1. Existe uma constante c tal que $f(x) = x + c$ para todo $x \in A$.
2. O conjunto A pode ser um conjunto aberto e limitado.
3. Se A for um conjunto aberto, então $f(x) = x + c$.
4. A é sempre um conjunto fechado.

Pode-se dizer que:

(a) A única afirmação correta é a 2.

(b) A única afirmação correta é a 3.

(c) As únicas afirmações corretas são a 1 e a 4.

(d) A única afirmação correta é a 4.

(e) As únicas afirmações corretas são a 3 e a 4.

Questão 16. Seja A um conjunto e seja $f : A \to A$ uma função. Um ponto fixo de f é qualquer elemento $x \in A$ tal que $f(x) = x$. Considere as funções abaixo.

1. $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma contração estrita, isto é, existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável com $|f'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e para algum $0 \leq \lambda < 1$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde f é uma função polinomial de grau ímpar ≥ 3.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - 1$.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 + 1$.

Dentre as funções acima, as únicas que necessariamente possuem pontos fixos são aquelas dos itens

(a) 2,4

(b) 2,4,5

(c) 1,2,3,4,5

(d) 1,2,4,5,6

(e) Todas as funções acima necessariamente possuem pontos fixos.

Questão 17. Considere o grupo multiplicativo

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{\text{matrizes } A,\ 2 \times 2 \ \text{ com entradas em } \mathbb{R} \mid \det A \neq 0\}$$

e seja $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ o subgrupo

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

Seja $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda $A \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ em $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ é

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}^\times \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}^\times \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}^\times \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}^\times \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Questão 18. Dados dois grupos abelianos $(G, +)$ e $(H, +)$, seja

$$\mathrm{Hom}(G, H) = \{f : G \to H \mid f \text{ é homomorfismo}\}$$

o grupo de todos os homomorfismos de G em H (i.e., o grupo de todas as funções $f : G \to H$ tais que $f(g_1 + g_2) = f(g_1) + f(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$, com a operação de soma de funções induzida pela soma de H). Então qual dos seguintes isomorfismos é falso?

(a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$

(b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

(c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$

(d) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$ (grupo trivial)

(e) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$