Prova Extramuros 2019 - Doutorado

Gabarito

Questão 1. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função C^2 satisfazendo

(a) $F(x,0) = F(0,y) = 0$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 F(x,y)$, $\forall \lambda > 0$.

Mostre que existe uma constante $K \in \mathbb{R}$ tal que $F(x,y) = Kxy$.

Solução 1. Primeiro observe que

$$F(0,0) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Considere $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ a Hessiana da função F. Pelo Teorema de Taylor, dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|F(x,y) - (ax^2 + 2bxy + cy^2)|}{|(x,y)|^2} < \epsilon, \ \forall\, |(x,y)| < \delta.$$

Portante, se $|(x,y)| = 1$, então escolhendo $0 < \lambda < \delta$, e usando a propriedade (ii)

$$\begin{aligned} \epsilon >& \frac{|F(\lambda x, \lambda y) - (a(\lambda x)^2 + 2b(\lambda x)(\lambda y) + c(\lambda y)^2)|}{|(\lambda x, \lambda y)|^2} \iff \\ \epsilon >& |F(x,y) - (ax^2 + 2bxy + cy^2)|. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que $F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ no círculo $|(x,y)| = 1$. Para $(x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, tomando $\lambda = |(x,y)|$ e, usando que, $F(x,y) = \lambda^2 F(\frac{(x,y)}{\lambda})$, concluímos que $F(x,y) = ax^2 + 2bxy + y^2$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Finalmente, $F(x,0) = F(0,y) = 0$ implica que $a = c = 0$. Portanto, tomando $K = 2b$, temos que $F(x,y) = Kxy$.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ uma função C^2 tal que $f(x)$ tem a mesma direção e sentido do que x, para todo x no domínio da f. Suponha que

$$\iiint_{B(r)} \operatorname{div}(f)\; dxdydz = 1 \ \forall r > 0$$

onde $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \le r\}$ denota a bola de raio r. Prove que

$$\min_{x \in \partial B(r)} |f(x)| \le \frac{1}{4\pi r^2}, \ \forall r > 0$$

onde $\partial B(r)$ denota a esfera de raio r.

Solução 2. Sabemos que o produto escalar de $f(x)$ com o vetor unitario $e_r(x) := \frac{1}{\|x\|}x$ que aponta na direção radial é $f(x) \cdot e_r(x) = \|f(x)\|$. Agora, aplicando o Teorema da divergência,

$$1 = \iiint_{B(r)} \operatorname{div}(f)\, dxdydz = \iint_{\partial B(r)} f(x) \cdot e_r(x)\, dA_x = \iint_{\partial B(r)} \|f(x)\|\, dA_x$$

onde dA_x denota o diferencial de área para a esfera de raio r num ponto $x \in \partial B(r)$.
Como f é continua e a esfera é compacta, $\|f(x)\|$ atinge um mínimo para $x \in \partial B(r)$. Logo,

$$\iint_{\partial B(r)} \|f(x)\|\, dA_x \geq \min_{x\in\partial B(r)} \|f(x)\| \left(\iint_{\partial B(r)} dA_x\right) = \min_{x\in\partial B(r)} \|f(x)\|\, (4\pi r^2).$$

Questão 3. Seja

$$\mathscr{L} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} < \infty \right\}.$$

(a) Mostre que as funções uniformemente contínuas pertencem ao fecho de $\mathscr{L}$ com relação à métrica $d(f,g) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$, com valores em $[0,\infty) \cup \{\infty\}$.

(b) Mostre que o fecho de $\mathscr{L}$ com relação a d é o conjunto das funções uniformemente contínuas.

Solução 3.

(a) Para uma sequencia (f_n) em $\mathscr{L}$ convergente para $f \in C(\mathbb{R})$, define $L_n := \sup_{x,y\in\mathbb{R}} |f(x) - f(y)|/|x-y|$. Para $\epsilon > 0$, escolhe n tal que $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon/3$. Daí,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq 2\epsilon + L_n|x-y|.$$

Se $|x-y| < \epsilon/(3L_n)$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Ou seja, f é uniformemente contínua.

(b) Se f é uniformemente contínua, então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < 1/n$ para qualquer x, y com $|x-y| < \delta$. Para $m \in \mathbb{Z}$, define $f_n(m\delta) := f(m\delta)$ e estende f_n linearmente a uma função afim por partes. Por construção, para $x, y \in [m\delta, (m+1)\delta]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|/(n\delta)$ e

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(m\delta)| + |f_n(m\delta) - f(x)| \leq \frac{|x - m\delta|}{n\delta} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}.$$

Então, (f_n) converge uniformemente a f, e por uma aplicação da desigualdade triangular, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|/(n\delta)$ para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$. Então, $f_n \in \mathscr{L}$.

Questão 4. Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas, respectivamente, por

$$f(x,y) = (x+y,\, xy), \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = (x+y+z,\, xy+xz+yz,\, xyz).$$

(a) Determine um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, conexo e maximal, de modo que f seja um difeomorfismo de U em $f(U)$. Justifique a maximalidade de U.

(b) Use a aplicação g para mostrar que as raízes de um polinômio cúbico

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

como funções dos coeficientes (a, b, c), são de classe C^∞ na vizinhança de qualquer polinômio, cujas raízes sejam todas distintas.

Solução 4. (a) Notemos que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo f não é injetiva.
Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ estudemos as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Obviamente, x e y são soluções da equação $p(z) := z^2 - az + b = 0$, que admite soluções reais se $\Delta := a^2 - 4b \geq 0$. Portanto,

$$f(\mathbb{R}^2) = \left\{(a, b) : a^2 - 4b \geq 0\right\}.$$

Notemos que

$$f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = \left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ (y, x) = \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}\right). \end{cases}$$

Definido os conjuntos

$$\begin{aligned} U_{\geq} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}, \qquad & U_{>} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}, \\ U_{\leq} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}, \qquad & U_{<} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}. \end{aligned}$$

podemos concluir então que as aplicações

$$\begin{aligned} f : U_{\geq} &\to \left\{(a, b) : a^2 - 4b \geq 0\right\} \\ f : U_{\leq} &\to \left\{(a, b) : a^2 - 4b \geq 0\right\} \\ f : U_{>} &\to \left\{(a, b) : a^2 - 4b > 0\right\} \\ f : U_{<} &\to \left\{(a, b) : a^2 - 4b > 0\right\} \end{aligned}$$

são todas bijetivas. Portanto, considerando $U = U_{>}$ e verificando que

$$\det Df(x, y) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{bmatrix} = x - y \neq 0,$$

para todo $x \neq y$, segue do Teorema da Função Inversa que $f : U_{>} \to f(U_{>})$ é um difeomorfismo com $U_{>}$ aberto conexo e maximal. A afirmação também vale tomando $U = U_{<}$.

(b) Consideramos a equação $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c = 0$ e supomos que tem três raízes reais distintas x, y, z. As raízes satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} x+y+z=-a, \\ xy+xz+yz=b, \\ xyz=-c. \end{cases}$$

Basta observar que

$$\det Dg(x,y,z)=\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}=(x-y)(y-z)(x-z)\neq 0,$$

para todo $x\neq y$, $x\neq z$ e $y\neq z$, e aplicar o Teorema da Função Inversa.

Questão 5.

Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ aberto tal que $0\in\Omega$ e considere a sequência de funções

$$f_n(x)=e^{-n\|x\|_2^2},\ n\in\mathbb{N},$$

definidas em Ω, onde $\|\cdot\|_2$ é a norma Euclidiana.

(a) Determine o valor de $I_n:=\int_\Omega f_n(x)dx$ no caso em que $\Omega=\mathbb{R}^3$.

(b) Suponha que Ω é limitado e mostre que $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)dx=0$.

Solução 5. (a) Notamos que

$$I_n=\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-n(x^2+y^2+z^2)}dxdydz=\lim_{r\to+\infty}\iiint_{B_r[0]} e^{-n(x^2+y^2+z^2)}dxdydz,$$

onde $B_r[0]$ denota a bola fechada de centro em zero e raio r. Usando coordenadas escrevemos $(x,y,z)=\rho\sigma$, com $\sigma\in S^2$, e a fórmula de mudança de variável nos dá nesse caso que

$$I_n=\lim_{r\to+\infty}\iint_{S^2}d\sigma\int_0^r e^{-n\rho^2}\rho^2d\rho.$$

Usando integração por partes temos finalmente

$$\begin{aligned} I_n&=4\pi\int_0^r e^{-n\rho^2}\rho^2d\rho=4\pi\lim_{r\to+\infty}\Big(-\frac{e^{-n\rho^2}}{2n}\rho\Big|_0^r+\frac{1}{2n}\int_0^r e^{-n\rho^2}d\rho\Big).\\ &=4\pi\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{2n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n}r}e^{-s^2}ds\\ &=\frac{2\pi}{n^{3/2}}\int_0^{+\infty}e^{-s^2}ds=\Big(\frac{\pi}{n}\Big)^{3/2}. \end{aligned}$$

(b) Usaremos $|A|$ para denotar a medida de un conjunto J- mensurável em de $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon>0$, escolhemos $\delta>0$ tal que

$$B_\delta(0) \subset \Omega \quad \text{e} \quad \left|B_\delta(0)\right| < \varepsilon/2.$$

Observamos agora que $f_n(x)$ converge uniformemente para $f \equiv 0$ em $\Omega \setminus B_\delta(0)$ como consequência da limitação uniforme $|f_n(x)| \leq e^{-n\delta^2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \Omega \setminus B_\delta(0)$. Então, existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \quad \text{para todo} \quad n > n_\delta \ \text{e} \ x \in \Omega \setminus B_\delta(0).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} I_n := \int_\Omega e^{-n\|x\|_2^2} dx &= \int_{B_\delta(0)} e^{-n\|x\|_2^2} dx + \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} e^{-n\|x\|_2^2} dx \\ &\leq \left|B_\delta(0)\right| + \frac{\varepsilon}{2|\Omega|} \left|\Omega \setminus B_\delta(0)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n > n_\delta$. Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$.