GABARITO DA PROVA EXTRAMUROS-DOUTORADO - 2016

Questão 1. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\{f_k\}_k$ sequência de funções reais contínuas convergindo pontualmente em K para uma função contínua f. Se

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \quad \forall x \in K, \quad k = 1, 2, \ldots$$

mostre que a convergência é uniforme. Mostre que o resultado é falso se K não é compacto.

Solução: Seja $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ existe $k_x \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_x$, então $f(x) - f_k(x) < \varepsilon/3$. Além disso, da continuidade de f e f_{k_x}, podemos escolher $\delta_x > 0$ tal que se $\|y - x\| < \delta_x$, então

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$$
$$|f_{k_x}(y) - f_{k_x}(x)| < \varepsilon/3$$

Pela desigualdade triangular, se $\|y - x\| < \delta_x$, então

$$|f(y) - f_{k_x}(y)| < \varepsilon.$$

Como K é compacto, existe uma família finita $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ de pontos de K tal que $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\delta_{x_i}}(x_i)$. Seja $k_0 = \max\{k_{x_1}, k_{x_2}, \ldots, k_{x_n}\}$. Se $y \in K$ então $y \in B_{\delta_{x_i}}(x_i)$ para algum $i = 1, \ldots, n$ e se $k \geq k_0$, temos

$$0 \leq f(y) - f_k(y) \leq f(y) - f_{k_0}(y) \leq f(y) - f_{n_{x_i}}(y) < \varepsilon.$$

O resultado é falso se K não é compacto. Por exemplo, considere $K = [0, +\infty)$ e $f_k \colon K \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 \leq x < k \\ k + 1 - x \text{ se } k \leq x < k+1 \\ 0 \text{ se } x \geq k+1 \end{cases}$$

Então f_k converge pontualmente para a função constante $f(x) = 1$, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$. No entanto, f_k não converge uniformemente para f, pois

$$\sup_{x \in K} |f_k(x) - f(x)| = 1.$$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\nabla f(x)$ é ortogonal a x. Mostre que f assume um valor máximo.

Solução: Dado $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, segue-se das hipóteses assumidas sobre f e da regra da cadeia que $\frac{d}{dt} f(tv) = \big\langle \nabla f(tv) : v \big\rangle = 0$ para todo $t \neq 0$. Portanto, do teorema do valor médio para funções de uma variável real, conclui-se que f é constante ao longo de semi-retas partindo da origem, de modo que o máximo de f existe e coincide com o máximo da sua restrição à esfera unitária (o qual existe, por compacidade).

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função de classe C^1 e $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(r) = \int_{B_r(0)} f(x)\, dx,$$

onde $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \|x\|_2 < r\}$ ($\|\ \|_2$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$).

1. Mostre que φ é função diferenciável em $(0, +\infty)$;
2. Calcule $\varphi'(r)$.

Solução: (1) Se $x = ry$, então $dx = r^n dy$ e

$$\varphi(r) = r^n \int_{B_1(0)} f(ry)\, dy.$$

A aplicação $g(r) = \int_{B_1(0)} f(ry)\, dy$ é diferenciável. De fato, se $r > 0$ e $|h| < r$, temos

$$f(ry + hy) = f(ry) + \langle f'(ry) : hy \rangle + \epsilon(r, h, y),$$

onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(r, h, y)}{|h|} = 0$$

uniformemente nos compatos de $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, pois, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\left| \frac{\epsilon(r, h, y)}{h} \right| = \big| \langle f'(ry + \theta hy) - f'(ry) : y \rangle \big| \leq \|f'(ry + \theta hy) - f'(ry)\|_2 \|y\|_2.$$

Portanto,

$$g(r + h) = g(r) + \int_{B_1(0)} h \langle f'(ry) : y \rangle\, dy + \int_{B_1(0)} \epsilon(r, h, y)\, dy$$

de onde se conclui que

$$g'(r) = \int_{B_1(0)} \langle f'(ry) : y \rangle \, dy.$$

(2) Do item anterior, temos:

$$\begin{aligned} \varphi'(r) &= nr^{n-1} g(r) + r^n g'(r) \\ &= nr^{n-1} \int_{B_1(0)} f(ry)\, dy + r^n \int_{B_1(0)} \langle f'(ry) : y \rangle \, dy \\ &= \frac{1}{r} \int_{B_r(0)} \big[nf(x) + \langle f'(x) : x \rangle \big] \, dx \end{aligned}$$

Questão 4.

(a) Sejam (X, d) um espaço métrico completo, (Λ, d_Λ) um espaço métrico e $F : X \times \Lambda \to X$ uma aplicação contínua.

Assumimos que F é *uniformemente κ-contratante* em x, *i.e.*

$\exists\, \kappa \in (0,1)$ tal que $\forall\, x, y \in X$ e $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $d(F(x,\lambda), F(y,\lambda)) \leq \kappa d(x,y)$.

Prove que para cada $\lambda \in \Lambda$, a equação $F(x,\lambda) = x$ tem uma única solução $x = x(\lambda)$. Prove também que $x : \lambda \in \Lambda \mapsto x(\lambda) \in X$ é contínua.

(b) Mostre que para qualquer parâmetro $t \in \mathbb{R}$, o sistema de equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x+y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2} \cos(x-y) - t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

admite uma única solução $(x,y) = (x(t), y(t))$ que varia continuamente com o parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Solução: **(a)** Fixe $\lambda \in \Lambda$. Então $F(\cdot, \lambda)$ é uma aplicação κ-contratante de X em X. Como X é um espaço métrico completo, segue do teorema do ponto fixo que existe um único $x = x(\lambda)$ em X solução de $F(x,\lambda) = x$.

Provaremos agora que $x : \lambda \in \Lambda \mapsto x(\lambda) \in X$ é contínua. Com efeito, sejam λ, $\lambda_0 \in \Lambda$. Denotaremos $x = x(\lambda)$ e $x_0 = x(\lambda_0)$. Segue então da desigualdade triangular e da hipótese F é *uniformemente κ-contratante* em x que

$$\begin{aligned} d(x,x_0) = d(F(x,\lambda),F(x_0,\lambda_0)) &\leq d(F(x,\lambda),F(x_0,\lambda)) + d(F(x_0,\lambda),F(x_0,\lambda_0)) \\ &\leq \kappa d(x,x_0) + d(F(x_0,\lambda),F(x_0,\lambda_0))\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Por outro lado, a continuidade de F com respeito à variável λ implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $d_\lambda(\lambda,\lambda_0) < \delta$, então $d(F(x_0,\lambda),F(x_0,\lambda_0)) < \varepsilon/(1-\kappa)$, e portanto usando (1), $d(x(\lambda),x(\lambda_0)) = d(x,x_0) < \varepsilon$.

(b) Consideramos a aplicação contínua

$$F : (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mapsto \Big(\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(x+y) + t - 1, \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}\Big)$$

Então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $F_t = F(\cdot,\cdot,t)$ é $\mathcal{C}^1$, e calculamos sua diferencial

$$DF_t(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ -\mathrm{sen}\,(x-y) & \mathrm{sen}\,(x-y) \end{pmatrix}.$$

Em particular, para cada vetor $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$DF_t(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(x+y)(h+k) \\ \mathrm{sen}\,(x-y)(k-h) \end{pmatrix}.$$

Escolhemos a norma euclidiana $\|\cdot\|_2$ (em dimensão finita todas as normas são equivalentes) e calculamos

$$\begin{aligned} \|DF_t(x,y)(h,k)\|_2^2 &= \frac{1}{4}\left(\cos^2(x+y)(h+k)^2 + \mathrm{sen}^2(x-y)(h-k)^2\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left((h+k)^2 + (h-k)^2\right) = \frac{1}{2}\|(h,k)\|_2^2\,, \end{aligned}$$

o que implica $\|DF_t\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto, segue da Desigualdade do Valor Médio que

$$\|F_t(x,y) - F_t(x_0,y_0)\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2, \quad \forall\,(x,y),\,(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Em outras palavras, a aplicação F é *uniformemente $\frac{1}{\sqrt{2}}$-contratante* em (x,y) e o resultado sai aplicando o item **(a)** a F.

Questão 5. Seja B a bola fechada unitária de centro na origem de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^{n-1}$ sua fronteira. Mostre que não existe uma função contínua

$$r : B \to \mathbb{S}^{n-1}$$

diferenciável no interior de B tal que $r(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Conclua que para toda $f : B \to B$ diferenciável no interior de B, existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Solução: Se existisse uma função contínua $r : B \to \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $r(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{S}^{n-1}$ seria homotopicamente trivial, o que não é o caso, pois $H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \equiv \mathbb{Z}$. Alternativamente, pode-se chegar à mesma conclusão, i.e., de que não existe uma tal função, usando-se aproximações de homotopias contínuas por homotopias diferenciáveis e um argumento clássico com o teorema de Stokes. Se existisse $f : B \to B$ diferenciável tal que, para todo $x \in B$, $f(x) \neq x$, a função $r : B \to \mathbb{S}^{n-1}$ que associa cada $x \in B$ à intersecção da semi-reta $\overrightarrow{f(x), x}$ com $\mathbb{S}^{n-1}$ seria uma função diferenciável, bem definida, cuja restrição a $\mathbb{S}^{n-1}$ é a identidade.