Gabarito Exame Extramuros - Doutorado - 2017

Questão 1: *Sejam X e Y subconjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^n$. Mostre que se X é compacto e Y é fechado, então $d(X,Y) > 0$, onde*

$$d(X,Y) = \inf\big\{\|x-y\| \,;\, x\in X,\, y\in Y\big\}.$$

Solução: Suponhamos, por absurdo, $d(X,Y)=0$. Pela definição de ínfimo, existe, para cada $n\in\mathbb{N}$, $(x_n,y_n)\in X\times Y$ tal que

$$0 \le \|x_n - y_n\| < 1/n. \tag{0.1}$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\|y_n\| \le \frac{1}{n} + \|x_n\|, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Como X é limitado, a sequência x_n é limitada e concluímos que a sequência y_n também é limitada. Portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que existem $x,y\in\mathbb{R}^n$ tais que $x_n\to x$ e $y_n\to y$. Sendo x e y pontos de acumulação de X e Y respectivamente e, sendo estes conjuntos fechados, concluímos que $x\in X$ e $y\in Y$.

Passando ao limite em (0.1) com $n\to\infty$, obtemos $x=y$, o que é absurdo, pois, por hipótese, X e Y são disjuntos.

Questão 2: *Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ função de classe C^1 tal que $0 < f'(t) \le 1$, para todo $t\in[0,1]$ e $f(0)=0$. Mostre que*

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^2 \ge \int_0^1 f^3(t)\,dt.$$

Solução: Consideremos $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \left(\int_0^x f(\tau)\,d\tau\right)^2 - \int_0^x f^3(\tau)\,d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e Regra da Cadeia, g é dferenciaável em $(0,1)$ e

$$g'(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(\tau)\,d\tau - f^2(x)\right] := f(x)h(x).$$

Observemos que

$$h'(x) = 2f(x)\big(1-f'(x)\big) \ge 0, \forall x\in(0,1).$$

Logo, g é crescente e $g(0)=0$, o que implica $g(1)\ge g(0)=0$, como queriímos provar.

Questão 3: *Seja $N:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ satisfazendo*

$$\begin{cases} (i) & N(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0, \\ (ii) & N(\lambda x) = |\lambda| N(x),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Definimos a bola unitária B associada a N por $B = \{x \in \mathbb{R}^n \, ; \, N(x) \leq 1\}$. Prove que N é uma norma se, e somente se, B é uma parte convexa de $\mathbb{R}^n$.

Solução: ($\Rightarrow$). Assuma que N é uma norma. Sejam x, $y \in B$ e $\theta \in [0,1]$. Então, obtemos da desigualdade triangular e da propriedade (ii) que

$$N\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leq \theta N(x) + (1-\theta)N(y) \leq \theta + (1-\theta) = 1.$$

Logo, $\theta x + (1-\theta)y \in B$ e B é convexo.

($\Leftarrow$). Assuma reciprocamente que B é convexo. Precisamos provar a desigualdade triangular. Sejam x, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definimos $z = \frac{1}{N(x)+N(y)}(x+y)$. Então, podemos escrever

$$z = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}\frac{x}{N(x)} + \frac{N(y)}{N(x)+N(y)}\frac{y}{N(y)}.$$

Isso implica que z é uma combinação convexa de $\frac{x}{N(x)}$ e $\frac{y}{N(y)}$, com ambos pertencentes a B, pela propriedade (ii). Deduzimos da convexidade de B que $z \in B$, ou em outras palavras, $N(z) \leq 1$. Conluímos então que $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$, o que prove que N é uma norma, já que x e y são arbitrários.

Questão 4: *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é p-homogênea se $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$, $\forall \lambda > 0$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Se $\langle : \rangle$ denota o produto escalar usual, mostre que uma função diferenciável é p-homogênea se, e somente se, satisfaz a relação*

$$\big\langle x : \nabla f(x) \big\rangle = pf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Solução: Consideremos $\varphi : (0. + \infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) = \lambda^p f(x)$. É claro que $\varphi'(\lambda) = p\lambda^{p-1}f(x)$. Por hipótese, $\varphi(\lambda) = f(\lambda x)$ e como f é diferenciável, temos da regra da cadeia

$$\varphi'(\lambda) = \langle \nabla f(\lambda x) : x \rangle, \quad \forall \lambda > 0.$$

Assim, $p\lambda^{p-1}f(x) = \langle \nabla f(\lambda x) : x \rangle$ para todo $\lambda > 0$. Tomando $\lambda = 1$ obtemos

$$pf(x) = \langle \nabla f(x) : x \rangle$$

como queríamos provar.

Reciprocamente, suponhamos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável satisfazendo a propriedade

$$pf(x) = \langle \nabla f(x) : x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Consideremos a função $\psi(\lambda) = f(\lambda x)$ definida para $\lambda > 0$. Então, pela regra da cadeia,

$$\psi'(s) = \langle \nabla f(\lambda x) : x \rangle = \frac{1}{\lambda}\langle \nabla f(\lambda x) : \lambda x \rangle = \frac{1}{\lambda} pf(\lambda x) = \frac{p}{\lambda}\psi(\lambda),$$

isto é,

$$\lambda \psi'(\lambda) - p\psi(\lambda) = 0, \quad \lambda > 0 \tag{$*$}$$

Multiplicando ambos os lados de $(*)$ por λ^{-p-1}, temos

$$\lambda^{-p}\psi'(\lambda) - p\lambda^{-p-1}\psi(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Big(\lambda^{-p}\psi(\lambda)\Big) = 0.$$

Portanto existe uma constante C tal que $\lambda^{-p}\psi(\lambda) = C$ para todo $\lambda > 0$, isto é, $f(\lambda x) = \psi(\lambda) = C\lambda^p$, para todo $\lambda > 0$. Tomando $\lambda = 1$, obtemos $f(x) = C$. Assim, $f(\lambda x) = f(x)\lambda^p$ para todo $\lambda > 0$, o que significa dizer que f é p-homogênea.

Questão 5: *Seja G_n^+ o conjunto das matrizes reais simétricas e positivas de ordem n. Lembrando que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2)\, dx = \sqrt{\pi/\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right) dx = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}, \quad \forall A \in G_n^+.$$

Solução: Como A é matriz simétrica e positiva, o Teorema Espectral nos garante que A possui n autovalores positivos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Mais precisamente, existe uma matriz unitária U tal que

$$U^T A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

Consideremos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $G(u) = Uu$. Então, para a substituição $x = G(u)$ temos $dx = |\det U| du = du$ e

$$\langle Ax : x\rangle = \langle AUu : Uu\rangle = \langle U^T AUu : u\rangle = \langle Du : u\rangle = \sum_{i-1}^{n} \lambda_i u_i^2.$$

Pelo Teroema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Du : u\rangle}{2}\right) du = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda_i u_i^2/2}\, du_i = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}}.$$

Lembrando que $\det[A] = \det[D] = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$, concluímos a solução.

Observação: Uma segunda solução é considerar que toda matriz simétrica e positiva possui uma raiz quadrada, isto é, se $A \in G_n^+$, então existe $B \in G_n^+$ tal qe $B^2 = A$. Isso é consequência imediata do Teorema Espectral. De fato, se $A \in G_n^+$, então existe U unitária satisfazendo (0.2). Seja $\sqrt{D}$ a matriz definida por

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Então $B = U^T \sqrt{D} U$ é raiz quadrada de A.

Voltando ao problema, se $u = Bx$, temos $du = |\det(B)|\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle B^2 x : x\rangle}{2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Bx : Bx\rangle}{2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|u\|_2^2}{2}\right) \left|\frac{1}{\det(B)}\right| du = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(B)}\end{aligned}$$

e concluímos a solução, já que $\det(B) = \sqrt{\det(A)}$.