

Prova Extramuros 2022 - Doutorado

Observação: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1 (1p). Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto ($n \geq 2$) e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ parcialmente diferenciável em U com derivadas parciais contínuas em U . Selecione as afirmações corretas.

- (a) f é contínua em 0 .
- (b) f é continuamente diferenciável em U .

Solução 1. (a) 0 não pertence necessariamente a U .

- (b) P. ex. Theorem 6.3.8 em Tao - Analysis II, 3rd edition. Texts and Readings in Mathematics, Volume 38 (2016).

Questão 2 (1p). Seja $\Delta \subset [0, 1]^n$, $n \geq 2$ tal que o fecho de Δ é $[0, 1]^n$ (i.e., Δ é denso em $[0, 1]^n$). Suponha que U é um aberto tal que $\Delta \subset U$. Selecione as afirmações corretas.

- (a) $U \supset [0, 1]^n$.
- (b) U é denso em $[0, 1]^n$.

Solução 2. U é denso pois $[0, 1]^n = \overline{\Delta} \subset \overline{U} \subset [0, 1]^n$. Do outro lado, se Δ possui uma representação $\Delta = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ (i.e. Δ é enumerável),

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y : \|x_n - y\| \leq 3^{-n}\}$$

é aberto e $\text{Vol}(U) \leq 1/2$. Daí, $[0, 1]^n$ não é um subconjunto de U .

Questão 3 (1.5p). Considere o conjunto de sequências $\Sigma = \{(a_n)_{n \geq 1} : a_n \in \{0, 1\}\}$. Dado $\theta = (a_n)_{n \geq 1} \in \Sigma$ associe o número

$$\omega(\theta) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n}.$$

Para o conjunto de números reais $\Lambda = \{\omega(\theta) : \theta \in \Sigma\}$ selecione as afirmações corretas.

- (a) Λ é fechado.

- (b) Λ é conexo
- (c) Λ não tem pontos isolados.

Solução 3.

Considere a métrica d em Σ dada por $d(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^i}$, onde $\theta = (a_n)$ e $\beta = (b_n)$. O espaço (Σ, d) é métrico compacto. Além disso, ω torna-se uma função contínua.

- (a) Λ é compacto, sendo imagem de um conjunto compacto por uma função contínua.
- (b) Λ é um conjunto de medida zero. Daí, Λ contém nenhum intervalo. Do outro lado, $0 = \omega(0, 0, \dots) \in \Lambda$ e $1/2 = \omega(1, 1, \dots) \in \Lambda$.
- (c) Seja $x = \omega((a_n)) \in \Lambda$ e $k \in \mathbb{N}$. Para (\bar{a}_n) definido por $\bar{a}_n := a_n$ para $n \neq k$ e $\bar{a}_k := a_k + 1 \pmod{2}$, obtém-se que

$$|\omega((a_n)) - \omega((\bar{a}_n))| = 3^{-k}.$$

Daí, x não é isolado.

Questão 4 (1p). Seja U uma vizinhança de 0 em \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

existe para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$. Selecione as afirmações corretas.

- (a) f é contínua em 0.
- (b) f é diferenciável em 0.

Solução 4. Escolhe uma função ilimitada $g : \{x : \|x\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ e define $f(x) := \|x\|g(x/\|x\|)$. Como g é ilimitada, existe x_n tal que $|g(x_n)| > n^2$. Daí, $\lim_n |f(x_n/n)| \geq \lim_n n = \infty$.

Questão 5 (1.5p). Assuma que a série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, $a_n \geq 0$. Selecione as afirmações corretas.

- (a) A série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.
- (b) A série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.
- (c) A série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{2/3}}$ diverge.

Solução 5. (a) Note simplesmente que $0 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_n$. Portanto, pelo critério de comparação a série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.

(b) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{a_i}}{i} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \right)$$

Como por hipóteses $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge and a p -série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, então o lado direito da desigualdade anterior é limitado, logo $\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{a_i}}{i}$ é limitado e sendo a soma parcial de números não negativos temos a convergência da série em questão.

(c) Analogamente, como no item (b) a série converge.

Questão 6 (1p). É possível representar o conjunto dos (x, y, z) tais que $xy - z \log y + e^{yz} - e = 0$ na forma $z = f(x, y)$ nas proximidades do ponto $(0, 1, 1)$?

Solução 6. Seja $g(x, y, z) = xy - z \log y + e^{yz} - e$, definida em $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Temos que $g(0, 1, 1) = 0$ e g é C^1 . Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = -\log y + ye^{yz},$$

logo $\frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1) = e \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$ onde o conjunto $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ é o gráfico de uma função C^1 , $f(x, y)$, ou seja, $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$.

Questão 7 (1p). O ponto $P = (1, -1, 2)$ pertence à interseção das superfícies definidas por $x^2(y^2 + z^2) = 5$ e $(x - z)^2 + y^2 = 2$. A curva formada pela interseção dessas duas superfícies admite, perto do ponto P , uma parametrização da forma $(x, f(x), g(x))$.

Solução 7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x^2(y^2 + z^2) - 5, (x - z)^2 + y^2 - 2).$$

Então, $f(P) = 0$. A matriz $[f'(x, y, z)]$ tem 2 linhas e 3 colunas. Como queremos expressar as variáveis y, z em função de x , temos de ver se é não nulo o determinante da submatriz de $[f'(P)]$ formada apenas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Calculando essas derivadas, avaliando em P , e calculando o determinante vemos que ele vale $4 \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo suficientemente pequeno $(1 - \delta, 1 + \delta)$ tal que para todo $x \in I$, o conjunto $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = (0, 0)\}$ é o gráfico $\{(x, y, z) : (y, z) = \varphi(x)\}$. Escrevendo $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, obtemos o resultado.

Questão 8 (2p). Considere a integral de linha

$$I_n = \int_{C_n} \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx),$$

onde C_n é o círculo $(x - n)^2 + y^2 = (3/2)^2$. Então, selecione as afirmações corretas :

- (a) $I_0 = 0$,
- (b) $I_1 = 0$,
- (c) $I_2 = 0$,
- (d) $I_3 = 2\pi$.

Solução 8. Seja $\theta = \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx)$. Primeiro, verificamos que $d\theta = 0$:

$$\begin{aligned} d\theta &= \left(\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy - \left(\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy \wedge dx, \\ &= \frac{-x^2 + y^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Isso é dizer que θ é uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Observamos que os círculos C_2 e C_3 são homólogos a 0 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então pelo teorema de Stokes, $\int_{C_2} \theta = \int_{C_3} \theta = 0$. Também, C_0 e C_1 são homólogos um ao outro em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então $\int_{C_0} \theta = \int_{C_1} \theta$. Esse valor pode ser calculado pela integral de linha em C_0 :

$$\begin{aligned} x &= 3/2 \cos(t), & y &= 3/2 \sin(t), \\ dx &= -3/2 \sin(t) dt & dy &= 3/2 \cos(t) dt \\ \int_{C_0} \theta &= \int_0^{2\pi} \frac{(3/2)^2 (\cos^2(t) + \sin^2(t))}{(3/2)^2} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Questão 9 (1p). Considere o espaço V das matrizes $n \times n$, munido da norma qualquer. Dizemos que $B \in V$ é uma raiz quadrada de A se $B^2 = A$. Existe $\delta > 0$ tal que, se $\|A - I\| < \delta$, então A admite uma raiz quadrada.

Solução 9. Primeiro observe que $I^2 = I$, logo I admite raiz quadrada. Considere a função $f: V \rightarrow V$, $f(B) = B^2$. Calculemos sua derivada. Temos

$$f(B + H) = B^2 + BH + HB + H^2.$$

Então, pondo $\epsilon(H) = H^2$, vemos que para cada $B \in V$, $f'(B)$ é o operador linear de V em V que a cada $H \in V$ faz corresponder $f'(B)(H) = BH + HB$. Assim, $f'(I)(H) = 2H$ (ou, por outras palavras, $f'(I) = 2I$). Vemos então que $f'(I) \in GL(V)$ é invertível.

Supondo que provámos que $f \in C^1$, então pelo Teorema da Função Inversa, concluímos que existe W uma vizinhança suficientemente pequena de $f(I)$, que podemos tomar da forma $\{A: \|A - f(I)\| < \delta\}$, tal que f^{-1} é uma bijeção entre W e uma vizinhança de I . Isso quer dizer exatamente que para cada A em W , existe um (único) B (que está perto de I) tal que $f(B) = A$, ou $B^2 = A$.

Questão 10 (1.5p). Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável com inversa diferenciável. Um ponto p é dito fixo se $f(p) = p$. Para um ponto fixo p denotemos por

$$\sigma_p(f) = \{\lambda: \lambda \text{ é um autovalor de } Df_p\}$$

o espectro da diferencial de Df_p .

Além disso, dizemos que p é hiperbólico se $\sigma_p(f) \cap S^1 = \emptyset$, *i.e.*, não existe autovalores de modulo 1. Selecione as afirmações corretas.

- (a) Sempre existem pontos fixos.
- (b) Pontos fixos são isolados.
- (c) Pontos fixos hiperbólicos são isolados.

Solução 10. (a) Tome $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e tome $f(x) = x + v$. Claramente, f não tem pontos fixos. Logo a afirmação é falsa.

(b) Tome $f(x) = x$. Logo a afirmação é falsa.

(c) Assuma que $f(p) = p$ é fixo hiperbólico. Assuma por contradição que existe p_n pontos fixos *i.e.*, $f(p_n) = p_n$ tal que $p_n \rightarrow p$. Então usando a série de Taylor para f centrada em p temos

$$p - p_n = f(p) - f(p_n) = Df(p)(p - p_n) + A(p - p_n),$$

onde $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(p - p_n)}{\|p - p_n\|} = 0$. Como $\left| \frac{p - p_n}{\|p - p_n\|} \right| = 1$, então passando a uma subsequência assumamos que $\frac{p - p_n}{\|p - p_n\|} \rightarrow v \neq 0$. Portanto, passando da equação anterior temos que $Df(p)(v) = v$ e p não é fixo hiperbólico.

Questão 11 (Cancelada). Seja $\Delta \subset [0, 1]^n$, $n \geq 1$ tal que o fecho de Δ é $[0, 1]^n$ (i.e., Δ é denso em $[0, 1]^n$), e suponha que $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua. Selecione todas as afirmações corretas.

- (a) Então, existe uma função contínua $\bar{f} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{\Delta} = \bar{f}$.
- (b) Se f é limitado, então existe uma função contínua $\bar{f} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{\Delta} = \bar{f}$.
- (c) Se f é Lipschitz contínua¹, então existe uma função Lipschitz contínua $\bar{f} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{\Delta} = \bar{f}$.
- (d) Se existe $\bar{f} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f|_{\Delta} = \bar{f}$, então f é unicamente determinado.

Solução 11. (a,b) Seja $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Então, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe.

- (c) Note que a condição de Lipschitz implica que $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy se (x_n) é Cauchy. Em particular, $\lim_n f(x_n)$ existe. Sejam $x, y \in [0, 1]^n$ e $(x_n), (y_n)$ sequências tal que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Então,

$$\lim_n |f(x_n) - f(y_n)| \leq C \lim_n \|x_n - y_n\| = C \|x - y\|.$$

Em escolher $x = y$, obtém-se que a função def. por $\bar{f}(x) := \lim_n f(x_n)$ é bem definida. Além disso, para x, y qualquer, obtém-se que \bar{f} é Lipschitz.

- (d) A continuidade e existencia de \bar{f} implica que

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n) = \bar{f}(x)$$

para $(x_n), (y_n)$ com $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow x$. Então, qualquer extensão contínua de f tem que ser igual a \bar{f} .

Observação: No enunciado, há um erro de digitação: $f|_{\Delta} = \bar{f}$ deve-se ler $\bar{f}|_{\Delta} = f$. Por esta razão, a questão foi cancelada.

Questão 12 (1.5p). Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado tal que para cada par de elementos $x, y \in A$, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ contínuo e retificável² com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Além disso, seja

$$\delta(x, y) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma : [0, 1] \rightarrow A \text{ cont. e retificável com } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

onde $\ell(\gamma)$ é o comprimento da curva γ . Selecione todas as afirmações corretas :

¹A função f é Lipschitz contínua se existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\| \forall x, y \in \Delta$.

²Ou seja, $\ell(\gamma) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|\gamma(k/n) - \gamma((k-1)/n)\|$ existe e é finito.

- (a) δ é uma métrica
- (b) $\sup\{\delta(x, y) : x, y \in A\} < \infty$
- (c) Se A é compacta, $\sup\{\delta(x, y) : x, y \in A\} < \infty$

Solução 12. (a) A desigualdade triangular é uma consequência do fato que a concatenação de dois caminhos retificáveis é retificável. Para ver que $\delta(x, y) > 0$ para $x \neq y$ basta aplicar o fato que o \mathbb{R}^n é um espaço geodésico.

- (b-c) Escolhe uma curva $\gamma_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e injetora tal que $\gamma([0, \infty))$ é um conjunto limitado e $\gamma(\infty) := \lim_t \gamma(t) \notin \gamma([0, \infty))$. Além disso, escolhe um caminho $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ retificável de $\gamma(0)$ a $\gamma(\infty)$ tal que $\tilde{\gamma}([0, 1]) \cap \gamma([0, \infty)) = \{\gamma(0)\}$. Por exemplo, $n = 3$ e

$$\gamma(t) := \frac{1}{t}(\cos t, \sin t, 0), \tilde{\gamma}(t) := (t, 0, t(1-t)).$$

Neste caso, A é compacto e A é homeomorfo a um círculo. Em particular, para qualquer par $x, y \in A$, existe um caminho de x a y que não passa por $\gamma(\infty)$. Em particular, este caminho é retificável.

Do outro lado,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta(\gamma(\infty), \gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \ell(\tilde{\gamma}) + \ell(\gamma|_{[0, t]}) = \infty.$$

Observação: Note que todo espaço métrico compacto tem diâmetro finito. Porém, o exemplo acima mostre que a topologia induzida por δ não necessariamente é compacta.

Pontuação. A pontuação de uma questão é determinado pela formula

$$(\text{Pontuação max.}) \times \max \left\{ 0, \frac{\#\{\text{respostas corretas}\} - \#\{\text{respostas erradas}\}}{\#\{\text{respostas}\}} \right\}.$$

Exemplo: No caso de uma questão com 3 pontos, 2 respostas corretas, uma errada e três indecidas, a pontuação final é $3 \times \frac{2-1}{6} = 0.5$.

Prova Extramuros 2022 - Doutorado

Identidade e respostas

Nome: _____

Identidade Passaporte Cédula de identidade

Identidade (numero) _____

Instituição de aplicação _____

Assinatura _____

Resposta 1 (1p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei

Resposta 2 (1p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei

Resposta 3 (1.5p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei
(c) verdadeira falso não sei

Resposta 4 (1p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei

Resposta 5 (1.5p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei
(c) verdadeira falso não sei

Resposta 6 (1p).

- (a) verdadeira falso

Resposta 7 (1p).

- (a) verdadeira falso

Resposta 8 (2p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei
(c) verdadeira falso não sei
(d) verdadeira falso não sei

Resposta 9 (1p).

- (a) verdadeira falso

Resposta 10 (1.5p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei
(c) verdadeira falso não sei

Resposta 11 (0p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei
(c) verdadeira falso não sei
(d) verdadeira falso não sei

Resposta 12 (1.5p).

- (a) verdadeira falso não sei
(b) verdadeira falso não sei
(c) verdadeira falso não sei