Resultado Prova Extramuros Mestrado 2022

Protocolo	Total de Acertos entre 18 questões	q1	q2	q3	q4	q5	q6	q7	q8	q9	q10	q11	q12	q13	q14	q15	q16	q17	q18
00100022837240894100823031163939	9	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1
01543058420506933911198228537782	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
02004829333566911072874080926915	13	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
02143140555557183297433718747074	8	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
031256476698688868641836684454181	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
04028196690516672056099261933929	5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
05094065158599156254643973094895	12	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
05175303455833466943282028376072	13	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0
06282812676332790991425110431052	8	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
09369429438913084615571251844931	7	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
09717959328139643451623826515379	6	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
10955393146261332528716713052613	7	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
11942941233780150502168817284026	10	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
13498710736580717151799924611887	2	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13694496171716069616168721828868	8	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
15386082358612995178194765008932	16	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
16249384739302703213086320879087	8	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
17323031328170461966753846456890	12	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
19388751617090881384385441583758	15	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
19627398707238155940651763608622	8	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
22766051923447414446280033286803	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
23117293000084731151941653109458	5	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
25768384626317606973858874738320	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
26392666981254843097947559700184	10	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
29655251566187253173545993901811	6	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
31128274448589430565320662402197	12	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
32488055772474124348118188349741	7	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
35374981238934899747397657994265	3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
36671265726894662825789194436700	8	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
38547799648171172068338391004400	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
40868269497601530499344452829914	4	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
41373782137184209890641915623737	12	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
41669127563785969122473716455935	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
42137320892635838923134326095279	5	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
45020632377964387291296143708607	8	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
45064487437427899238726426812209	7	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
46075699780801909726525068551670	15	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
46237349115020933878437863946672	6	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
46637807770810984370428622504625	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
47841893313411325651083286120571	13	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
48500073221347953827586406713698	2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49411643534296741115068680774867	8	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
50084932926442798816584107411028	7	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
50103494979510069541993626719527	5	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
54660255224520960978571903781630	4	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
55386273088005178166311822533525	6	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
55681897885335637932997773810886	14	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
56239214534825558783388000128686	7	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
57641677964488724717994370161798	12	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
58034798935407904002854896554662	7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
60023076494526812279511170715458	3	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61046235650448606571732916535926	4	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
61886176925744644605305604757917	10	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
63304246975799749232562939957292	8	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
64416242521800968527459264270249	8	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
68431699113159614611999905671653	12	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
71493370942016764053252669617565	8	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
72947711568995605059748930784749	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
75763922582993322307215409991672	6	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
75773025380703255993841466233295	8	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
75951423029277399961708374842950	11	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1
77196727542344475019430032535340	10	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1
78750425076322725102761549569543	6	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
79822065910378820955980783531305	8	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
80543641908957980151980273864649	5	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
82075508557281932182921054566921	16	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
82213466771935002129418913175520	8	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
83022645333030845470118269823894	10	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
83611944297712733949461222506238	8	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
84421512381123253444221924892157	6	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
86162778986972969891825228857290	12	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
89308833657141529221455926922117	4	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
90144442035956793772244068042026	14	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
91316109631443844283258754508445	8	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
91652192799144792018336487053530	2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
92086693249569256792488669288594	5	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
92813657471098320518359026956608	4	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
93874254346872439302218465056560	4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
93921459091791665144204596446827	14	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
93953322162408198991135066305397	7	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
94288043308756345199463916160852	7	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
94911871908334490978645129088571	6	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
95312558775666495279630903555060	8	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0
96115235298634466115830214754524	14	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
96868424022383607006989092007010	11	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
98678314829478047617692347871623	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
N15	12	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0
N16	5	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
N17	6	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0

[redacted]

PROVA EXTRAMUROS-MESTRADO 2022
12.11.2022

Questão 1 [q1]. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem dois com coeficientes reais. Recorde que o traço de uma matriz $M = (M_{jk})_{j,k=1,2} \in M_2(\mathbb{R})$ é dado por $\mathrm{Tr}(M) = M_{11} + M_{22}$. Sejam $A_{jk} : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $j,k = 1,2$ funções de classe C^1, e considere a função matricial $A = (A_{jk})_{j,k=1,2} : (-1,1) \to M_2(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(1) Para todo $m \geq 1$, a função $x \mapsto \mathrm{Tr}(A(x)^m)$ é diferenciável.

(2) Se $A(0)$ é a matriz identidade e, para algum $\delta > 0$, vale $\det A(x) = 1$ para $|x| < \delta$, então $A'_{11}(0) = -A'_{22}(0)$.

(3) Se $\det A(0) \neq 0$, então a matriz $A(x)$ é invertível para todo x suficientemente próximo de 0.

(4) A função $x \mapsto |\det A(x)|$ é diferenciável.

Qual, dentre as opções abaixo, corresponde a afirmações que não são sempre verdadeiras?

A (2)

B (3)

[redacted] (4)

D (1) e (3)

E (2) e (4)

Questão 2 [q2]. Considere a seguinte sequência

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots\right).$$

Qual dentre as seguintes afirmações é correta?

A A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.

B A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tem um número finito de pontos de acumulação.

[redacted] A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é densa em $[0,1]$.

D A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ não possui subsequência decrescente.

E A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é sequência de Cauchy.

Questão 3 [q3]. Sejam $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas e estritamente monótonas, com $f(1) \neq g(1)$. Considere as sequências (a_n) e (b_n) determinadas por

$$a_n = f(n) \quad \text{e} \quad b_n = g(n), \quad n \geq 1.$$

Sabe-se que existe um único ponto $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$c \in [a_n, b_n], \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Qual das seguintes afirmações é falsa?

A $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

B Os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existem e são iguais.

[redacted] f é decrescente e g é crescente.

D $f(x) \neq g(y)$ para quaisquer $x, y \in [1,+\infty)$.

E $\sup_{x\geq 1} f(x) = \inf_{x\geq 1} g(x)$.

Questão 4 [q4]. Sejam $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções reais. Assuma que f_n, f sejam diferenciáveis. Sobre as afirmações

(1) a convergência $f_n \to f$ vale pontualmente

(2) a convergência $f_n \to f$ vale uniformemente

(3) a convergência

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{vale}$$

(4) a convergência $f'_n \to f'$ vale pontualmente

é correto afirmar que

A (1) implica (3), e (2) implica (1).

B (2) implica (1), e (2) também implica (4).

C (4) implica (3), e (2) implica (3).

[redacted] (2) implica (1), e (2) implica (3).

E (1) e (3) combinadas implicam (2).

[redacted]

Questão 5 [q5]. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com f e f' sendo limitadas. Considere as seguintes afirmações:

(1) Para todo $x \in \mathbb{R}$, o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

existe.

(2) Existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $h > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right| \leq M.$$

(3) O limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

Qual dentre as alternativas abaixo contempla todas as afirmações que são sempre verdadeiras?

A (1)

B (2)

C (3)

D (1) e (2)

[redacted] (1), (2) e (3)

Questão 6 [q6]. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, que assume valores positivos e negativos, e defina

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

(1) Se $f(1) = 0$ e $f'(1) \neq 0$, então f^+ não é diferenciável em $x = 1$.

(2) $(f^+)^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

(3) Se f for uniformemente contínua, então f^+ também será.

(4) Se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$, então $\int_{-\infty}^{+\infty} (f^+(x))^2 dx < +\infty$.

Quantas das afirmações acima são sempre verdadeiras?

A nenhuma

B uma

C duas

[redacted] três

E quatro

Questão 7 [q7]. Considere os vetores $v_1 = (1, 2, -2), v_2 = (1, -1, 4)$ e

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{n}(a, b, -b), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{n}(c, a, b), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{n}(b, -b, d).$$

Marque a alternativa que dá a sequência (n, a, b, c, d) para a qual $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é um conjunto de geradores para o espaço gerado por v_1 e v_2.

[redacted] $(3, 1, 2, 2, -1)$

B $(\sqrt{2}, 0, 1, 1, 0)$

C $(1, 1, 0, 0, 1)$

D $(\sqrt{3}, 1, 1, 1, -1)$

E Nenhuma das demais alternativas.

Questão 8 [q8]. Considere os operadores T e S de $\mathbb{R}^3$ cujas leis são

$$T(x, y, z) = (x, -x+2y, 2z), \; S(x, y, z) = (x, x+z, x-y).$$

Qual das seguintes afirmativas é a verdadeira?

[redacted] T admite infinitas retas invariantes.

B S admite infinitas retas invariantes.

C S e T são operadores diagonalizáveis.

D S e T admitem em comum duas retas invariantes.

E S e T não têm autovalor comum.

Questão 9 [q9]. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador autoadjunto e I o operador identidade em $\mathcal{V}$. Considere as afirmações abaixo.

(1) O operador $T^2 + 2T + 4I$ é um isomorfismo.

(2) Para todo $v \in \mathcal{V}$ tem-se $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$.

(3) Se B é uma base de $\mathcal{V}$, então a matriz de T com relação a B é uma matriz simétrica.

(4) Se $T^2 = T$, então T é uma projeção ortogonal.

Pode-se dizer que

A nenhuma afirmação é verdadeira.

B somente uma afirmação é verdadeira.

C somente duas afirmações são verdadeiras.

[redacted] somente três afirmações são verdadeiras.

E as quatro afirmações são verdadeiras.

Questão 10 [q10]. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem dois com coeficientes reais. Considere as transformações lineares $S : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $S(A) = AM - MA$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(A) = NA$, sendo $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Se $\mathfrak{S}$ é a dimensão do núcleo de S e $\mathfrak{R}$ é a dimensão da imagem de T, então $\mathfrak{S} - \mathfrak{R}$ é igual a

[redacted] 0

B -1

C 1

D -2

E 2

[redacted]

Questão 11 [q11]. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

(A) Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo com produto interno, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear autoadjunto e $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ o operador identidade. Então $I + iT$ é injetor.

(B) Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Se $f, g : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ são funcionais lineares tais que $\{v \in \mathcal{V}; f(v) = 0\} = \{v \in \mathcal{V}; g(v) = 0\}$, então existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tal que $f = \alpha g$.

(C) Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear autoadjunto. Se B é uma base de $\mathcal{V}$, então a matriz de T com relação a esta base é uma matriz diagonal.

(D) Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real com produto interno e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Se $\langle Tv, v\rangle = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}$, então $T = 0$.

A (A), (B) e (C).

[redacted] (A) e (B).

C (B), (C) e (D).

D (A), (B) e (D).

E (A), (B), (C) e (D).

Questão 12 [q12]. Considere as seguintes afirmativas:

(A) O conjunto de todas as funções $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{R}$, considerado com a soma de funções e produto de escalar por função usuais, é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

(B) Se $\dim V > 0$ e $T : V \to V$ é um operador linear tal que $T^2 = 0$, então T não é um isomorfismo.

(C) Se $0 < \dim V < \infty$ e $T : V \to V$ é um operador linear tal que $T^2 = 0$, então $S = I_V + T$ é um isomorfismo.

(D) O operador linear $T : P_n \to P_n$ do espaço dos polinômios P_n em uma variável real de grau menor ou igual a n, definido por $T(p)(x) = p(x) + xp'(x)$, é um isomorfismo.

(E) O operador linear $S : P_n \to P_n$ do espaço dos polinômios P_n em uma variável real de grau menor ou igual a n, $n \geq 1$, definido por $S(p)(x) = p(x) - xp'(x)$, é um isomorfismo.

Quantas dessas afirmativas são verdadeiras?

A uma

B duas

C três

[redacted] quatro

E cinco

Questão 13 [q13]. Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Qual das seguintes afirmações é falsa?

A Todo subgrupo de G de índice 2 é normal.

B H é subgrupo normal de G se, e somente se, o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G tem estrutura de grupo.

C Se G é abeliano, então todo subgrupo é normal.

[redacted] Se G é não-abeliano, então existe ao menos um subgrupo que não é normal.

E G tem ao menos um subgrupo normal.

Questão 14 [q14]. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e H, K subgrupos (distintos) de G de índice 2. Qual das seguintes alternativas é correta?

A $H \cap K$ é normal e $\mid G/(H \cap K) \mid > 4$.

[redacted] $H \cap K$ é normal e $G/(H \cap K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

C $H \cap K$ não é normal e o conjunto das classes laterais de $H \cap K$ em G tem 4 elementos.

D $H \cap K$ é normal e $G/(H \cap K) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

E todos as outras afirmações são falsas.

Questão 15 [q15]. Seja $G = \mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$ (observe que $2022 = 2 \times 3 \times 337$ onde 337 é um número primo). Considere as seguintes afirmações:

(i) Existe um homomorfismo sobrejetor $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) Não existe um homomorfismo injetor $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to G$.

(iii) O grupo dos automorfismos de G tem 2×336 elementos.

(iv) O grupo dos automorfismos de G tem 3×336 elementos.

É correto dizer que

A são falsas (iii) e (iv).

B são verdadeiras (i) e (ii).

[redacted] são verdadeiras (i) e (iii).

D são verdadeiras (ii) e (iii).

E são falsas (i) e (iv).

Questão 16 [q16]. Sejam $p \in \mathbb{Z}$ um número primo, $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $B = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ o anel das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Qual das seguintes aplicações não é um homomorfismo de anéis?

A $\varphi : \mathbb{Z} \to B$ definida por $\varphi(n) = n1$, onde 1 é a identidade multiplicativa de B.

B Para $a \in A$, $\varphi : A[T] \to A$ definida por $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i$.

[redacted] $\varphi : B \to B$ definida por $\varphi(f) = f'$, onde f' representa a derivada de f.

D $\varphi : A[T] \to A[T]$ definida por $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^{ip}$.

E Para $a \in \mathbb{R}$, $\varphi : B \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(f) = f(a)$.

Questão 17 [q17]. Sejam A um anel comutativo com unidade e P um ideal maximal de A. Sejam (P, X) o ideal de $A[X]$ gerado pelo conjunto $P \cup \{X\}$ e $P[X]$ o ideal de $A[X]$ dos polinômios com coeficientes em P. Considere as seguintes afirmações:

(i) $P[X]$ é primo e $A[X]/P[X] \simeq (A/P)[X]$

(ii) $P[X]$ é maximal e $A[X]/P[X] \simeq A/P$

(iii) (P, X) é primo e $A[X]/(P, X) \simeq A/P$

(iv) $P[X] = (P, X)$ e $A[X]/P[X] \simeq (A/P)[X]$

É correto dizer que

A são falsas (ii) e (iii).

B são falsas (i) e (iv).

C são verdadeiras (i) e (iv).

D são verdadeiras (ii) e (iii).

[redacted] são verdadeiras (i) e (iii).

[redacted]

Questão 18 [q18]. Seja p um número primo e considere o subanel $A = \{a/b \in \mathbb{Q} : \mathrm{mdc}(a, b) = 1 \text{ e } p \nmid b\}$ de $\mathbb{Q}$. O conjunto $\mathfrak{m} = \{a/b \in A : p \mid a\}$ é um ideal de A. Considere as seguintes afirmações:

(i) A é local e $\mathfrak{m}$ é primo.

(ii) $\mathfrak{m}$ é maximal e $A/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(iii) A tem só dois ideais primos: (0) e $\mathfrak{m}$.

(iv) $\mathfrak{m}$ é maximal mas não é principal.

(v) A não é local e $\mathfrak{m}$ é maximal.

É correto dizer que

[redacted] são verdadeiras (i), (ii) e (iii).

B são verdadeiras (ii) e (v).

C são verdadeiras (iii) e (iv).

D são falsas (i) e (iii).

E são falsas (ii) e (v).

[redacted]

[redacted]

PRUEBA EXTRAMUROS-MASTER 2022
12.11.2022

Cuestión 1 [q1]. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales. Recuerde que el trazo de una matriz $M = (M_{jk})_{j,k=1,2} \in M_2(\mathbb{R})$ es dada por $\operatorname{Tr}(M) = M_{11} + M_{22}$. Sean $A_{jk} : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $j, k = 1, 2$ funciones de clase C^1, y consideremos la función matricial $A = (A_{jk})_{j,k=1,2} : (-1,1) \to M_2(\mathbb{R})$. Considere las siguientes afirmaciones:

(1) Para todo $m \geq 1$, la función $x \mapsto \operatorname{Tr}(A(x)^m)$ es diferenciable.

(2) Si $A(0)$ es la matriz identidad y para algun $\delta > 0$, se cumple $\det A(x) = 1$ para $|x| < \delta$, entonces $A'_{11}(0) = -A'_{22}(0)$.

(3) Si $\det A(0) \neq 0$, entonces la matriz $A(x)$ es invertible para todo x suficientemente cercano a 0.

(4) La función $x \mapsto |\det A(x)|$ es diferenciable.

¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a afirmaciones que no siempre son verdaderas?

- A (2)
- B (3)
- [redacted] (4)
- D (1) e (3)
- E (2) e (4)

Cuestión 2 [q2]. Considere la seguinte sucesión

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots\right).$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.
- B La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ tiene un número finito de puntos de acumulacíon.
- [redacted] La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es denso en $[0, 1]$.
- D La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ no tiene subsucesión decreciente.
- E La sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ es sucesión de Cauchy.

Cuestión 3 [q3]. Sean $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dois funciones acotadas y estrictamente monótonas, con $f(1) \neq g(1)$. Considere las sucesiones (a_n) y (b_n) determinadas por

$$a_n = f(n) \quad \text{y} \quad b_n = g(n), \quad n \geq 1.$$

Se sabe que existe un único punto $c \in \mathbb{R}$ que satisface

$$c \in [a_n, b_n], \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

- A $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- B Los limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existen y son iguales.
- [redacted] f es decreciente y g es creciente.
- D $f(x) \neq g(y)$ para cualquier $x, y \in [1, +\infty)$.
- E $\sup_{x\geq 1} f(x) = \inf_{x\geq 1} g(x)$.

Cuestión 4 [q4]. Sean $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ y $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funciones de variable real. Suponga que f_n, f son diferenciables. Sobre las afirmaciones

(1) la convergencia $f_n \to f$ se cumple puntualmente

(2) la convergencia $f_n \to f$ se cumple uniformemente

(3) la convergencia

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{se cumple}$$

(4) la convergencia $f'_n \to f'$ se cumple puntualmente

es correcto decir que

- A (1) implica (3), y (2) implica (1).
- B (2) implica (1), y (2) también implica (4).
- C (4) implica (3), y (2) implica (3).
- [redacted] (2) implica (1), e (2) implica (3).
- E (1) y (3) combinados implican (2).

[redacted]

Cuestión 5 [q5]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, con f y f' acotadas. Considere las siguientes afirmaciones:

(1) Para todo $x \in \mathbb{R}$, el límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$
existe.

(2) Existe una constante $M > 0$ tal que para todo $h > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$,
$$\left| \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right| \leq M.$$

(3) El límite
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$
existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

¿Cuál de las siguientes alternativas incluye todos las afirmaciones que siempre son ciertas?

A (1)
B (2)
C (3)
D (1) y (2)
[redacted] (1), (2) y (3)

Cuestión 6 [q6]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, que toma valores positivos y negativos, y defina
$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Considere las siguientes afirmaciones:

(1) Si $f(1) = 0$ y $f'(1) \neq 0$, entonces f^+ no es diferenciable en $x = 1$.

(2) $(f^+)^2$ es diferenciable en $\mathbb{R}$.

(3) Si f es uniformemente continua, entonces también lo es f^+.

(4) Si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < +\infty$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} (f^+(x))^2 dx < +\infty$.

¿Cuántas de las afirmaciones anteriores son siempre verdaderas?

A ninguna
B una
C dos
[redacted] tres
E cuatro

Cuestión 7 [q7]. Considere los vectores $v_1 = (1, 2, -2), v_2 = (1, -1, 4)$ y
$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{n}(a, b, -b), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{n}(c, a, b), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{n}(b, -b, d).$$

Marque la alternativa que da la secuencia (n, a, b, c, d) para la cual $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es un conjunto de generadores para el espacio generado por v_1 e v_2.

[redacted] $(3, 1, 2, 2, -1)$
B $(\sqrt{2}, 0, 1, 1, 0)$
C $(1, 1, 0, 0, 1)$
D $(\sqrt{3}, 1, 1, 1, -1)$
E Ninguna de las otras alternativas.

Cuestión 8 [q8]. Considere los operadores T y S de $\mathbb{R}^3$ cuyas leyes son
$$T(x, y, z) = (x, -x+2y, 2z), \; S(x, y, z) = (x, x+z, x-y).$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

[redacted] T admite infinitas rectas invariantes.
B S admite infinitas rectas invariantes.
C S y T son operadores diagonalizables.
D S y T admiten dos rectas invariantes en común.
E S y T no tienen valor propio común.

Cuestión 9 [q9]. Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador autoadjunto y I el operador identidad en $\mathcal{V}$. Considere las siguientes afirmaciones.

(1) El operador $T^2 + 2T + 4I$ es un isomorfismo.

(2) Para todo $v \in \mathcal{V}$ tenemos $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$.

(3) Si B es una base de $\mathcal{V}$, entonces la matriz de T con relación a B es una matriz simétrica.

(4) Si $T^2 = T$, entonces T es un operador ortogonal.

Pode-se dizer que

A ninguna afirmación es verdadera.
B solo una afirmación es verdadera.
C solo dos afirmaciones son verdaderas.
[redacted] solo tres afirmaciones son verdaderas.
E las cuatro afirmaciones son verdaderas.

Cuestión 10 [q10]. Sea $M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos con coeficientes reales. Considere las transformaciones lineales $S : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $S(A) = AM - MA$, donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(A) = NA$, donde $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Si $\mathfrak{S}$ es la dimensión del núcleo de S y $\mathfrak{R}$ es la dimensión de la imagen de T, entonces $\mathfrak{S} - \mathfrak{R}$ es igual a

[redacted] 0

B -1

C 1

D -2

E 2

Cuestión 11 [q11]. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

(A) Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial complejo con producto interno, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal autoadjunto y $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ el operador identidad. Entonces $I + iT$ es injectivo.

(B) Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Si $f, g : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ son funcionales lineales tales que $\{v \in \mathcal{V}; f(v) = 0\} = \{v \in \mathcal{V}; g(v) = 0\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tal que $f = \alpha g$.

(C) Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real de dimensión finita con producto interno y $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal autoadjunto. Si B es una base de $\mathcal{V}$, entonces la matriz de T con respecto a esta base es una matriz diagonal.

(D) Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real con producto interno y $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal. Si $\langle Tv, v \rangle = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}$, entonces $T = 0$.

A (A), (B) y (C).

[redacted] (A) y (B).

C (B), (C) y (D).

D (A), (B) y (D).

E (A), (B), (C) y (D).

Cuestión 12 [q12]. Considere las siguientes afirmaciones:

(A) El conjunto de todas las funciones $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, considerado con la habitual suma de funciones y producto de escalar por función, es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

(B) Si $\dim V > 0$ y $T : V \to V$ es un operador lineal tal que $T^2 = 0$, entonces T no es un isomorfismo.

(C) Si $0 < \dim V < \infty$ y $T : V \to V$ es un operador lineal tal que $T^2 = 0$, entonceso $S = I_V + T$ es un isomorfismo.

(D) El operador lineal $T : P_n \to P_n$ del espacio de polinomios P_n en una variable real de grado menor o igual a n, definido por $T(p)(x) = p(x) + xp'(x)$, es un isomorfismo.

(E) El operador lineal $S : P_n \to P_n$ del espacio de polinomios P_n en una variable real de grado menor o igual a n, $n \geq 1$, definido por $S(p)(x) = p(x) - xp'(x)$, es un isomorfismo.

¿Cuántas de estas afirmaciones son verdaderas?

A una

B dos

C tres

[redacted] cuatro

E cinco

Cuestión 13 [q13]. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A Todo subgrupo de G de índice 2 es normal.

B H es subgrupo normal de G si y solo si el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G tiene estructura de grupo.

C Si G es abeliano, entonces todo subgrupo es normal.

[redacted] Si G no es abeliano, entonces hay al menos un subgrupo que no es normal.

E G tiene al menos un subgrupo normal.

Cuestión 14 [q14]. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y H, K subgrupos (distintos) de G de índice 2. ¿Cual de los siguientes es correcto?

A $H \cap K$ es normal y $\mid G/(H \cap K) \mid > 4$.

[redacted] $H \cap K$ es normal y $G/(H \cap K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

C $H \cap K$ no es normal y el conjunto de clases laterales de $H \cap K$ en G tiene 4 elementos.

D $H \cap K$ es normal y $G/(H \cap K) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

E todas las demás afirmaciones son falsas.

[redacted]

Cuestión 15 [q15]. Sea $G = \mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$ (observe que $2022 = 2 \times 3 \times 337$ donde 337 es un número primo). Considere las seguintes afirmaciones:

(i) Existe un homomorfismo sobreyector $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) No existe un homomorfismo inyector $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to G$.

(iii) El grupo de los automorfismos de G tiene 2×336 elementos.

(iv) El grupo de los automorfismos de G tiene 3×336 elementos.

Es correcto decir que

- A son falsas (iii) y (iv).
- B son verdaderas (i) y (ii).
- [redacted] son verdaderas (i) y (iii).
- D son verdaderas (ii) y (iii).
- E son falsas (i) y (iv).

Cuestión 16 [q16]. Sean $p \in \mathbb{Z}$ un número primo, $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ y $B = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ el anillo de funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}$. ¿Cuál de los siguientes mapas no es un homomorfismo de anillos?

- A $\varphi : \mathbb{Z} \to B$ definida por $\varphi(n) = n1$, donde 1 es la identidad multiplicativa de B.
- B Para $a \in A$, $\varphi : A[T] \to A$ definida por $\varphi(\sum_{i=0}^n a_i T^i) = \sum_{i=0}^n a_i a^i$.
- [redacted] $\varphi : B \to B$ definida por $\varphi(f) = f'$, donde f' representa la derivada de f.
- D $\varphi : A[T] \to A[T]$ definida por $\varphi(\sum_{i=0}^n a_i T^i) = \sum_{i=0}^n a_i T^{ip}$.
- E Para $a \in \mathbb{R}$, $\varphi : B \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(f) = f(a)$.

Cuestión 17 [q17]. Sean A un anillo conmutativo con unidad y P un ideal maximal de A. Sean (P, X) el ideal de $A[X]$ generado por el conjunto $P \cup \{X\}$ y $P[X]$ el ideal de $A[X]$ de los polinomios con coeficientes en P. Considere las seguintes afirmaciones:

(i) $P[X]$ es primo y $A[X]/P[X] \simeq (A/P)[X]$

(ii) $P[X]$ es maximal y $A[X]/P[X] \simeq A/P$

(iii) (P, X) es primo y $A[X]/(P, X) \simeq A/P$

(iv) $P[X] = (P, X)$ y $A[X]/P[X] \simeq (A/P)[X]$

Es correcto decir que

- A son falsas (ii) y (iii).
- B son falsas (i) y (iv).
- C son verdaderas (i) y (iv).
- D son verdaderas (ii) y (iii).
- [redacted] son verdaderas (i) y (iii).

Cuestión 18 [q18]. Sea p un número primo y considere el subanillo $A = \{a/b \in \mathbb{Q} : \mathrm{mdc}(a, b) = 1 \text{ e } p \nmid b\}$ de $\mathbb{Q}$. El conjunto $\mathfrak{m} = \{a/b \in A : p \mid a\}$ es un ideal de A. Considere las seguintes afirmaciones:

(i) A es local y $\mathfrak{m}$ es primo.

(ii) $\mathfrak{m}$ es maximal y $A/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(iii) A tiene solo dos ideales primos: (0) y $\mathfrak{m}$.

(iv) $\mathfrak{m}$ es máxima pero no principal.

(v) A no es local y $\mathfrak{m}$ es maximal.

Es correcto decir que

- [redacted] son verdaderas (i), (ii) y (iii).
- B son verdaderas (ii) y (v).
- C son verdaderas (iii) y (iv).
- D son falsas (i) y (iii).
- E son falsas (ii) y (v).