Nombre: **A42**
Identificación: **N42**
Polo: **T-AVULSO**

PRUEBA EXTRAMUROS
MASTER 11.11.2023

## CUESTIONS

**Cuestión 1** [q1]. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f$ es monótona en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y considere las siguientes condiciones:

(I) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(II) $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(III) $|f(x)| \leq \frac{1}{|x| \ln |x|}$ para $x \geq 10$.

(IV) $\sum_{n=1}^{\infty} (|f(n)| + |f(-n)|)$ es convergente.

¿Cuáles, de entre las condiciones (I) a (IV), garantizan que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

sea convergente?

- A Solamente (II).
- B Solamente (III).
- ■ Solamente (IV).
- D Solamente (I) y (III).
- E Solamente (III) y (IV).

**Cuestión 2** [q2]. En cuanto a la convergencia de las series

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^{n+1} + \cos\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) \right) ,$$

$$\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt{n}} , \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}} ,$$

es correcto afirmar que:

- ■ Sólo (c) no converge.
- B Sólo (b) converge.
- C Sólo (c) converge.
- D Sólo (a) no converge.
- E Sólo (b) no converge.

**Cuestión 3** [q3]. Considere la función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{\cos(x)} \sqrt{1 - t^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \operatorname{sen}^2(t)\mathrm{d}t .$$

Entre las afirmaciones:

(I) $f$ es una función constante.

(II) $f$ toma solo valores positivos en $[0, \pi]$.

(III) $f$ es derivable en $(0, \pi)$.

(IV) $f(0) > 0$.

¿**Cuántas** son verdaderas?

- A Ninguna de las afirmaciones.
- B Solo una afirmación.
- C Solo dos afirmaciones.
- D Solo tres afirmaciones.
- ■ Todas las afirmaciones.

**Cuestión 4** [q4]. Sea $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^6}$. Utilizando una serie de potencias, podemos deducir que las derivadas de orden 2023 y 2024 de $f$ en cero son, respectivamente:

- A $-2023!$ y $2024!$.
- B $2023!$ y $0$.
- C $0$ y $2024!$.
- ■ $-2023!$ y $0$.
- E Ninguna de las otras alternativas.

**Cuestión 5** [q5]. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función dada. El *módulo de continuidad* de $f$ es la función $\omega : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(s) = \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| < s\} .$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones garantiza que $\lim_{s\to 0^+} \omega(s) = 0$?

- A $f$ es acotada.
- ■ $f$ es uniformemente continua.
- C $f$ es no decreciente.
- D $f$ es integrable.
- E Ninguna de las otras opciones.

**Cuestión 6** [q6]. Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una función continua, y $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^m$. Defina $A = a_n :, n \geq 1 \subset \mathbb{R}^m$, y considere las siguientes condiciones:

(1) $(a_n)n \geq 1$ es acotada.

(2) $(a_n)n \geq 1$ es de Cauchy.

(3) El conjunto $A$ es denso en $\mathbb{R}^m$.

(4) El conjunto $A$ tiene un número finito de puntos de acumulación en $\mathbb{R}^m$.

Considere también las siguientes afirmaciones:

(I) La secuencia $(f(a_n))_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}^m$.

(II) El conjunto $f^{-1}(A)$ es denso en $\mathbb{R}^m$.

(III) El conjunto $f(A)$ es denso en $\mathbb{R}^m$.

(IV) El conjunto $f(A)$ es acotado en $\mathbb{R}^m$.

¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a las implicaciones que siempre son verdaderas?

- A (2) implica (I) y (3) implica (II).
- B (2) implica (II) y (3) implica (III).
- ■ (2) implica (I) y (1) implica (IV).
- D (3) implica (I) y (4) implica (IV).
- E (1) implica (I) y (4) implica (IV).

**Cuestión 7** [q7]. Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial y $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal cuya matriz en relación a una base dada de $\mathcal{V}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Siendo $I$ la identidad en $\mathcal{V}$, marque la alternativa que proporciona todos los autovalores del operador $T^5 - 3T^3 - 4I$.

- ■ -6, -4, 4
- B -1, 2, 32
- C 0, -4, 8
- D 0, 1, 2
- E -3, 4, 5

**Cuestión 8** [q8]. Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un operador lineal cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda(4-\lambda)(5-\lambda)(\lambda^2+1)$. Marque la alternativa correcta:

- ■ La imagen de $T$ tiene dimensión 4.
- B $T$ es diagonalisable
- C $T$ es injectiva.
- D Existe una base $B$ de $\mathbb{R}^5$ en relación a la cual se tiene $T\big((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_B\big) = (0, x_2, x_3, 4x_4, 5x_5)_B$.
- E Existe un autovalor de $T$ con dos autovectores linealmente independientes.

**Cuestión 9** [q9]. Recordemos que la sucesión de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 1}$ está dada por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)$. Sea $T$ el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (1,2)$ y $T(1,2) = (2,3)$. Considera las siguientes afirmaciones:
(I) Para $n \geq 2$, $T$ lleva el par $(f_{n-1}, f_n)$ al par $(f_n, f_{n+1})$.
(II) Para el conjunto $X = (f_n, f_{n+1}), n \geq 1$, tenemos que $T : X \to X$ es una función biyectiva.
(III) Los autovalores de $T$ son irracionales.
(IV) $T$ es un operador invertible.
Marca la alternativa correcta:

- ■ Solo (I), (III) y (IV) son verdaderas.
- B Solo (I) y (II) son verdaderas.
- C Solo (II) y (III) son verdaderas.
- D Solo (I), (II) y (III) son verdaderas.
- E Todas las afirmaciones son verdaderas.

**Cuestión 10** [q10]. Considere $\mathcal{P}_1$, el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado máximo 1, equipado con el producto interno

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt.$$

Sea $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(p) = (p(0), p'(0))$, donde $p'$ es la derivada de $p$. Podemos decir que $T$ es una isometría si en $\mathbb{R}^2$ utilizamos el producto interno $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_2 =$

- ■ $x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{3}y_1y_2$
- B $\frac{1}{2}x_1x_2 + x_1y_2 + \frac{1}{3}x_2y_1 + \frac{1}{2}y_1y_2$
- C $x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$
- D $x_1x_2 + y_1y_2$
- E $x_1x_2 + \frac{1}{2}y_1y_2$

**Cuestión 11** [q11]. Considere un espacio vectorial real $\mathcal{V}$ de dimensión finita equipado con un producto interno. Sea $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador autoadjunto. Considere las siguientes afirmaciones:
(I) Si 3 y 4 son autovalores de $T$, entonces existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $||v|| = \sqrt{2}$ y $||T(v)|| = 5$.
(II) El operador $T^2 + 2T + 2I$, donde $I$ es la identidad en $\mathcal{V}$, es un isomorfismo.
(III) Existe un operador lineal $S : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $S^3 = T$.
Marque la alternativa correcta:

- ■ Todas las afirmaciones son verdaderas.
- B Solo (I) y (II) son verdaderas.
- C Solo (I) y (III) son verdaderas.
- D Solo (II) y (III) son verdaderas.
- E Solo una afirmación es verdadera.

**Cuestión 12** [q12]. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial real de dimensión finita. Considere las siguientes afirmaciones:
(I) Considere dos productos internos en $\mathcal{V}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$, de modo que un conjunto sea ortogonal con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ si y solo si es ortogonal con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Entonces los productos internos son iguales.
(II) Si $B$ es una base de $\mathcal{V}$, entonces existe un producto interno en $\mathcal{V}$ con respecto al cual $B$ es un conjunto ortonormal.
(III) Suponga que $\mathcal{V}$ esté equipado con un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{V}$ y $T$ un operador lineal en $\mathcal{V}$ tal que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{V}$. Entonces $\langle u, v\rangle_1 = \langle T^2(u), T^2(v)\rangle$ define un producto interno en $\mathcal{V}$ que satisface $\langle u, v\rangle_1 = 0$ si y solo si $\langle u, v\rangle = 0$.
Marque la alternativa correcta:

[redacted] Solo (II) y (III) son verdaderas.
B Solo (I) y (II) son verdaderas.
C Solo (I) y (III) son verdaderas.
D Solo una afirmación es verdadera.
E Todas las afirmaciones son verdaderas.

**Cuestión 13** [q13]. Sea $S_7$ el grupo de permutaciones de 7 elementos. El conjunto de las órdenes de los elementos de $S_7$ es:

A {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.
B {1,2,3,4,5,6,7,9,10,12}.
C $\{\ d \in \mathbb{N}\ :\ d\,\text{divide}\ 7!\}$.
[redacted] {1,2,3,4,5,6,7,10,12}.
E $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 7!\}$.

**Cuestión 14** [q14]. Sean $S_3$ el grupo de permutaciones de 3 elementos y $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ el grupo aditivo de los enteros módulo 10. Sobre los homomorfismos de $S_3$ en $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, podemos afirmar que:

A Sólo existe el homomorfismo trivial entre estos dos grupos.
[redacted] Se trata de un conjunto con exactamente 2 elementos.
C No existe homomorfismo entre estos dos grupos.
D Todos estos homomorfismos tienen el mismo núcleo, dado por $H = \{1, \alpha, \alpha^2\}$, donde $\alpha = (1\,2\,3)$.
E Todas las demás afirmaciones son falsas.

**Cuestión 15** [q15]. Sean $G$ un grupo y $H$, $K$ subgrupos de $G$. Considera las siguientes afirmaciones:

(I) Si $[G : H]_e$ denota la cardinalidad del conjunto de las clases laterales izquierdas de $H$ en $G$ y $[G : H]_d$ denota la cardinalidad del conjunto de las clases laterales derechas de $H$ en $G$, entonces $[G : H]_e = [G : H]_d$.
(II) Si $G$ no es abeliano, entonces existe un subgrupo normal no trivial de $G$.
(III) Si $[G : H]_e = 2$, entonces $H$ es un subgrupo normal de $G$.
(IV) Si $H$ es un subgrupo normal de $K$ y $K$ es un subgrupo normal de $G$, entonces $H$ es un subgrupo normal de $G$.

Podemos afirmar que:

A Solo (III) es verdadera.
B Solo (II) es falsa.
[redacted] Solo (I) y (III) son verdaderas.
D Solo (I) y (IV) son verdaderas.
E Solo (I) es verdadera.

**Cuestión 16** [q16]. Sean $A$ un anillo y $A[X]$ el anillo de polinomios con coeficientes en $A$. Considera las siguientes afirmaciones:

(I) Si $A$ es un dominio de integridad, entonces todo polinomio mónico se descompone en productos de polinomios irreducibles.
(II) Si $f(X), g(X) \in A[X]$ y $X|f(X)g(X)$, entonces $X|f(X)$ o $X|g(X)$.
(III) Si 2 es un elemento invertible, entonces la aplicación

$$\alpha : A[X]/\langle X^2 - 1\rangle \to A \times A,$$
$$\alpha\left(\overline{f(X)}\right) = (f(1), f(-1)),$$

es un isomorfismo.
(IV) Si $M$ es un ideal maximal de $A$, entonces $M + \langle X\rangle$ es un ideal maximal de $A[X]$.

Indique la alternativa correcta.

A (I) y (II) son falsas.
[redacted] (I) y (III) son verdaderas.
C (II) y (IV) son verdaderas.
D (II) y (III) son verdaderas.
E (I) y (III) son falsas.

**Cuestión 17** [q17]. Para $F$ un cuerpo, denotamos por $f(X), g(X) \in F[X]$ polinomios irreducibles distintos del mismo grado. Consideramos las siguientes afirmaciones, para cada $F$ correspondiente:

(I) $\mathbb{Q}[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{Q}[X]/\langle g(X)\rangle$.

(II) $\mathbb{R}[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{R}[X]/\langle g(X)\rangle$.

(III) $\mathbb{C}[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{C}[X]/\langle g(X)\rangle$.

(IV) $\mathbb{F}_2[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{F}_2[X]/\langle g(X)\rangle$.

Indique la alternativa correcta:

- A (I) y (III) son falsas.
- B (II) y (IV) son falsas.
- C (II) y (III) son falsas.
- ■ (II) y (IV) son verdaderas.
- E Todas las afirmaciones son verdaderas.

**Cuestión 18** [q18]. Sean $A$ un dominio de ideales principales (DIP), $Q(A)$ el cuerpo cociente de $A$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de elementos primos de $A$. Supongamos que $\mathcal{P}$ tenga un número infinito de elementos. Para $p \in \mathcal{P}$, considera los siguientes subanillos $B_p$ y $C_p$ de $Q(A)$:

$$B_p = \{a/b \in Q(A) : p \nmid b\}$$
$$C_p = \{f(1/p) : f(X) \in A[X]\}$$

¿Es correcto afirmar que:

- ■ $B_p$ es un anillo local y $C_p$ es un DIP.
- B $C_p$ es un anillo local y $B_p$ es un DIP.
- C $B_p$ es un anillo local pero no es un DIP.
- D $C_p$ es un anillo local pero no es un DIP.
- E $B_p$ y $C_p$ son anillos locales.