PROVA EXTRAMUROS-DOUTORADO - 2016

Nome: ______________________________

Identidade (passaporte): ______________________________

Assinatura: ______________________________

Instituição onde a prova foi aplicada: ______________________________

Observação: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $\{f_k\}_k$ sequência de funções reais contínuas convergindo pontualmente em K para uma função contínua f. Se

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \quad \forall x \in K, \quad k = 1, 2, \dots$$

mostre que a convergência é uniforme. Mostre que o resultado é falso se K não é compacto.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\nabla f(x)$ é ortogonal a x. Mostre que f assume um valor máximo.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função de classe C^1 e $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(r) = \int_{B_r(0)} f(x)\, dx,$$

onde $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_2 < r\}$ ($\|\ \|_2$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$).

1. Mostre que φ é função diferenciável em $(0, +\infty)$;
2. Calcule $\varphi'(r)$.

Questão 4.

(a) Sejam (X, d) um espaço métrico completo, (Λ, d_Λ) um espaço métrico e $F : X \times \Lambda \to X$ uma aplicação contínua.

Assumimos que F é *uniformemente κ-contratante* em x, *i.e.*

$\exists\, \kappa \in (0, 1)$ tal que $\forall\, x, y \in X$ e $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $d(F(x, \lambda), F(y, \lambda)) \leq \kappa d(x, y)$.

Prove que para cada $\lambda \in \Lambda$, a equação $F(x, \lambda) = x$ tem uma única solução $x = x(\lambda)$. Prove também que $x : \lambda \in \Lambda \mapsto x(\lambda) \in X$ é contínua.

(b) Mostre que para qualquer parâmetro $t \in \mathbb{R}$, o sistema de equações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\text{sen}\,(x + y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2}\cos(x - y) - t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

admite uma única solução $(x, y) = (x(t), y(t))$ que varia continuamente com o parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Questão 5. Seja B a bola fechada unitária de centro na origem de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{S}^{n-1}$ sua fronteira. Mostre que não existe uma função

$$r : B \to \mathbb{S}^{n-1}$$

diferenciável no interior de B tal que $r(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Conclua que para toda $f : B \to B$ diferenciável no interior de B, existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.