PROVA EXTRAMUROS-MESTRADO - 2016

NOME: ______________________________

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): ______________________________

ASSINATURA: ______________________________

Instruções

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) A parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total.

BOA PROVA!

Respostas da Parte II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1	**d**	2	**c**	3	**b**
4	**d**	5	**d**	6	**d**
7	**c**	8	**c**	9	**a**
10	**c**	11	**a**	12	**d**
13	**a** ou **b**	14	**e**	15	**e**

Parte I: Questões dissertativas

Questão 1. Considere a série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+n^2x^4}, \qquad \alpha > 0.$$

(i) (0,5) Mostre que esta série converge pontualmente no intervalo $[0,\infty)$;

(ii) (0,5) Mostre que se $\alpha < 4$, a convergência é uniforme em $[a,\infty)$ qualquer que seja $a > 0$;

(iii) (0,5) Mostre que se $2 < \alpha \leq 4$, a convergência é uniforme em $[0,\infty)$.

Solução: Seja $f_k(x) = x^\alpha/(1+k^2x^4)$ e $S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x)$.

(i) Como $f_k(0) = 0$ para todo $k \geq 0$ e $0 < f_k(x) \leq x^{\alpha-4}/k^2$ para todo $k \geq 1$ e $x > 0$, conclui-se pelo teste da comparação que a série $S_n(x)$ converge pontualmente em $[0,\infty)$.

(ii) Se $\alpha < 4$ e $x \geq a > 0$, então $f_k(x) \leq a^{\alpha-4}/k^2$ para todo $k \geq 1$. Logo, pelo teste M de Weierstrass, a série $S_n(x)$ converge uniformemente no intervalo $[a,\infty)$.

(iii) Se $\alpha = 4$, tem-se $0 \leq f_k(x) \leq 1/k^2$ para todo $x \in [0,\infty)$. Por outro lado, se $2 < \alpha < 4$,

$$\max\{f_k(x)\,;\, x \in [0,\infty)\} = C_\alpha \frac{1}{k^{\alpha/2}},$$

onde

$$C_\alpha = \frac{\alpha^{\alpha/4}(4-\alpha)}{4(4-\alpha)^{\alpha/4}}.$$

Em ambos os casos, o resultado segue do Teste M de Weierstrass.

Questão 2. (1,0) Seja $\mu(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1 \text{ para algum } n\}$. Mostre que os grupos $(\mu(\mathbb{C}), \cdot)$ e $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ são isomorfos.

Solução: Para $z \in \mu(\mathbb{C})$, seja n um número natural tal que $z^n = 1$. Assim, $|z| = 1$ e portanto $z = e^{2\pi ik/n}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Observe que se $n|k$, então $z = 1$.

Agora defina

$$\varphi : \mu(\mathbb{C}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \qquad z = e^{2\pi ik/n} \to \overline{k/n}.$$

Primeiramente, vamos verificar que φ é um homomorfismo. Se $y^m = 1$ e $z^n = 1$, então $y^{mn} = z^{mn} = 1$. Assim, $y = e^{2\pi ik/mn}$ e $z = e^{2\pi il/mn}$ para algum $k, l \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$\varphi(yz) = \varphi(e^{2\pi i(k+l)/mn}) = \overline{(k+l)/mn} = \overline{k/mn} + \overline{l/mn} = \varphi(y) + \varphi(z).$$

Além disso, se $\varphi(z) = \varphi(e^{2\pi il/n}) = \overline{l/n} = 0$, então $l/n \in \mathbb{Z}$ e assim $n|l$. Isto implica que $z = 1$ e portanto φ é injetiva.

Se $\overline{p/q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, podemos admitir que $p, q \in \mathbb{N}$. Evidentemente, $\varphi(e^{2\pi ip/q}) = \overline{p/q}$ e assim φ é sobrejetiva. Portanto, φ é um isomorfismo.

Parte II: Questões de múltipla escolha

Questão 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$f''(x) + xf'(x) = \cos(x^3 f'(x)) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Considere as seguintes afirmações:

(i) Se f admitir um ponto crítico x_0, então x_0 será ponto de mínimo local.

(ii) $\exists\, r > 0$ tal que f tem concavidade para cima em $(-r, r)$.

(iii) f poderá admitir no máximo um ponto crítico.

(iv) f é uma função ímpar.

(v) A equação $f(x) = 0$ tem no máximos duas raízes.

Sobre as afirmações anteriores é correto dizer que:

(a) Somente (i) e (ii) são verdadeiras.

(b) Somente (i) e (iii) são verdadeira.

(c) Somente (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.

(d) Somente (i), (ii), (iii) e (v) são verdadeiras.

(e) Todas são verdadeiras.

Questão 2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitada e Riemann integrável e considere $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$. Sobre as afirmações:

(i) Existe $C > 0$ tal que $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$ para todo $x, y \in [0,1]$.

(ii) Se f for contínua em $a \in [0,1]$ então g será derivável em a.

(iii) Suponha que f tenha descontinuidade removível em $a \in (0,1)$, i.e., $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$. Então g é derivável em a.

(iv) Suponha que f tenha uma descontinuidade do tipo salto em $a \in (0,1)$, i.e., $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. É possível que g seja derivável em a.

(v) Se $f \geq 0$ então existe $C > 0$ tal que $g(x) \geq Cf(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

é correto dizer que:

(a) Somente (i) é verdadeira.

(b) Somente (i) e (ii) são verdadeiras.

(c) Somente (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.

(d) Somente (i), (ii), (iii) e (iv) são verdadeiras.

(e) Todas são verdadeiras.

Questão 3. Escolha a alternativa errada.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 7$. Então f tem ao menos um ponto crítico.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto de forma que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in K$. Então existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ para todo $x, y \in K$.

(c) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Então existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ para todo $x, y \in K$.

(d) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em 0 tal que $f'(0) \neq 1$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [-\epsilon, \epsilon]\backslash\{0\}$.

(e) Sejam $f, g, h : (a, b) \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Se f e h são deriváveis em $c \in (a, b)$, $f(c) = h(c)$ e $f'(c) = h'(c)$, então g é derivável em c e $g'(c) = f'(c)$.

Questão 4. Escolha a alternativa errada.

(a) Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = a$.

(b) Seja (a_n) uma sequência de números positivos tais que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n^2} = 0$.

(c) Se $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [a, b]$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ são tais que $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, então $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n \in [a, b]$.

(d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(e) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

Questão 5. Escolha a alternativa errada.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^4 e suponha que $p(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ seja seu polinômio de Taylor de ordem 4 em torno de $x = 1$. Então f tem um mínimo local em $x = 1$.

(b) Seja $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ derivável com $f(0) = 0$. Se o limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ existe então vale zero.

(c) Seja $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Então $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x) dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

(d) Se $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, então $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left[\cos^+(nx) + \operatorname{sen}^+(nx)\right] dx \to 4\pi$ quando $n \to \infty$.

(e) $\lim_{x \to \infty} (e^x + x^e)^{1/x} = e$.

Questão 6. Considere uma matriz real simétrica A de ordem 3 com determinante igual a 6. Suponha que $u = (4, 8, -1)$ e $v = (1, 0, 4)$ sejam autovetores desta matriz associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

(i) Os autovalores de A são apenas 1 e 2.

(ii) O produto vetorial $u \times v$ é necessariamente autovetor de A.

(iii) O vetor $(5, 8, 3)$ é autovetor de A.

(iv) A pode não ser diagonalizável.

Então, podemos afirmar que

(a) As afirmações (i) e (ii) são verdadeiras, (iii) e (iv) são falsas.

(b) As afirmações (ii), (iii) são verdadeiras, (i) e (iv) são falsas.

(c) As afirmações (iii), (iv) são verdadeiras e (i) e (ii) são falsas.

(d) A afirmação (ii) é verdadeira e as demais são falsas.

(e) Todas as afirmações de (i) a (iv) são verdadeiras.

Questão 7. Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $T : U \to V$ transformação linear. Se V é espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, considere a função $(\cdot, \cdot) : U \times U \to \mathbb{R}$ definida por $(u_1, u_2) = \langle T(u_1), T(u_2) \rangle$, para todo $u_1, u_2 \in U$. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

(a) $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno de U somente se T for um isomorfismo.

(b) $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno de U somente se T for uma isometria.

(c) $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno de U se T é injetora.

(d) $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno de U se T é sobrejetora.

(e) $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno de U se T é operador auto-adjunto.

Questão 8. Para V espaço vetorial real de dimensão finita, uma involução em V é um operador linear $\varphi : V \to V$ tal que $\varphi^2 = \mathrm{I}$, ou seja, $\varphi(\varphi(x)) = x$ para todo $x \in V$. Dado um operador linear $T : V \to V$, sejam $\mathrm{Fix}(T) = \{x \in V \ : \ T(x) = x\}$ e $\mathcal{A}(T) = \{x \in V \ : \ T(x) = -x\}$, chamados subespaço de pontos fixos de T e subespaço antipodal de T, respectivamente. Considere as seguintes afirmações:

(i) Se φ é uma involução, então $\det(\varphi) = 1$.

(ii) $\mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) \ = \ \ker(\varphi_1 - \varphi_2)$.

(iii) Se λ é autovalor de uma involução, então $\lambda = \pm 1$.

(iv) Se φ_1, φ_2 são involuções, então $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é também uma involução.

(v) $\mathcal{A}(\varphi) \ = \ \mathrm{Im}(\mathrm{I} - \varphi)$.

Assinale a afirmativa correta:

(a) Apenas (i), (ii), (iii) são verdadeiras.

(b) Apenas (iii), (v) são verdadeiras.

(c) Apenas (i) e (iv) são falsas.

(d) Apenas (ii) (iii), (iv) são verdadeiras.

(e) Apenas (iii) é falsa.

Questão 9. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Denotamos por $I : V \to V$ a transformação identidade. Se o polinômio característico de uma transformação linear $T : V \to V$ é $x^2 - x - 1$, então é correto afirmar que:

(a) T é inversível e $T^{-1} = T - I$.

(b) T não é necessariamente inversível.

(c) T é inversível e $T^{-1} = T + I$.

(d) Não existe T com tal polinômio característico.

(e) T é inversível, mas nenhuma das fórmulas para a inversa de T nos outros itens é válida.

Questão 10. Dizemos que dois espaços vetoriais são *naturalmente* isomorfos quando é possível exibir um isomorfismo entre tais espaços sem realizar uma escolha de bases. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Assinale a alternativa incorreta:

(a) Os espaços V e $(V^*)^*$ são naturalmente isomorfos. Aqui $V^* = \mathrm{Lin}(V, \mathbb{R})$ e $(V^*)^* = \mathrm{Lin}(V^*, \mathbb{R})$.

(b) Suponha V munido de um produto interno e seja $0 \neq p \in V$. Então os espaços $V/\mathbb{R}p$ e $p^{\perp} := \big\{v \in V \mid \langle v, p\rangle = 0\big\}$ são naturalmente isomorfos. Aqui $\mathbb{R}p = \{tp;\, t \in \mathbb{R}\}$.

(c) Os espaços V e V^* não são naturalmente isomorfos mesmo no caso em que V está munido de um produto interno.

(d) Se V e W possuem a mesma dimensão, então são isomorfos.

(e) Se V e W possuem a mesma dimensão, os espaços vetoriais reais $\mathrm{Lin}(V, W)$ e $\mathrm{Lin}(V, V)$ são isomorfos. (Denotamos por $\mathrm{Lin}(V, W)$ o espaço vetorial real das aplicações lineares de V em W).

Questão 11. Seja $R^\times$ o grupo de todos os elementos invertíveis de um anel comutativo R. Se $R := \mathbb{Z}/2p^n\mathbb{Z}$, onde p é um número primo diferente de 2 e $n \geq 2$, então a ordem de $R^\times$ é

(a) $(p-1)p^{n-1}$

(b) $2(p-1)p^{n-1}$

(c) $2p^{n-1}$

(d) p^{n-1}

(e) $(p-1)^{n-1}$

Questão 12. Seja $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$ o seguinte subgrupo aditivo de $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right] := \left\{\frac{a}{7^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Claramente $\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]$. É

(a) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo finito com 7

(b) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo finito com mais de 7

(c) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo infinito e cada elemento de ordem 7.

(d) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo infinito e cada elemento ordem finita.

(e) $\mathbb{Z}[\frac{1}{7}]/\mathbb{Z}$ é um grupo infinito e tem, pelo elemento de ordem infinita.

Questão 13. Seja $\mathbb{Z}[X]$ o anel dos polinômios com coeficientes inteiros. Considere as seguintes informações:

(i) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_0 \equiv 0 \mod (3)\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$.

(ii) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_2 \equiv 0 \mod (3)\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$.

(iii) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : a_0 = a_1 = a_2 = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$.

(iv) $\mathbb{Z}[X^2] = \{a_0 + a_2X^2 + \cdots + a_{2n}X^{2n} \in \mathbb{Z}[X]\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$.

(v) $\{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] : \sum_{i=0}^{n} a_i = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$.

(vi) $\{P(X) \in \mathbb{Z}[X] : P'(0) = 0\}$ (onde P' é a derivada de P) é um ideal de $\mathbb{Z}[X]$.

Assinale a alternativa correta:

(a) Apenas (i) e (v) são verdadeiras.

(b) Apenas (iii) e (v) são verdadeiras.

(c) Apenas (iv) e (vi) são verdadeiras.

(d) Apenas (i) e (ii) são verdadeiras.

(e) Apenas (i) e (iv) são verdadeiras.

Questão 14. Seja p um número primo. Seja $\mathbf{C}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ um e multiplicação definidas como

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d), \qquad (a, b) \circ (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

É correto afirmar que:

(a) $\mathbf{C}_p$ é um corpo para qualquer número primo p.

(b) $\mathbf{C}_p$ não é um corpo para todo número primo p.

(c) $\mathbf{C}_2$ não é um corpo, mas $\mathbf{C}_p$ é um corpo para todo

(d) $\mathbf{C}_2$ é um corpo e $\mathbf{C}_p$ não é um corpo para algum

(e) $\mathbf{C}_2$ não é um corpo e $\mathbf{C}_p$ é um corpo para algum

Questão 15. Seja $A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

(i) $A[X]$ é domínio de integridade.

(ii) $A[X]$ é anel de ideais principais.

(iii) $A[X]$ é anel euclidiano.

(iv) $X^2 + 1$ é irredutível em $A[X]$.

(v) $X^2 - 2$ é irredutível em $A[X]$.

Assinale a afirmativa correta:

(a) Apenas (i), (ii) e (iii) são verdadeiras.

(b) Apenas (iii) e (v) são verdadeiras.

(c) Apenas (iv) e (v) são verdadeiras.

(d) Apenas (ii), (iii) e (v) são verdadeiras.

(e) Apenas (iv) é falsa.