[redacted]

PROVA EXTRAMUROS 2019

1. A duração da prova será de cinco (5) horas.
2. Cada questão de escolha múltipla tem apenas uma reposta correta. As resposta só serão consideradas se registradas na **FOLHA DE RESPOSTAS** (última folha da prova).
3. As prova são individuais, com as questões em ordem diferente para cada aluno. **VERIFIQUE** se seu nome está em **TODAS** as folhas que você recebeu.
4. **ASSINE** a folha de respostas.
5. Na folha de respostas, marque a resposta escolhida preenchendo **TOTALMENTE** o quadrado correspondente com caneta preta ou azul. **NÃO** marque apenas um X.

Questão 1. O conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) := \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, onde p é um número primo, possui tanto uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais (na qual a soma e o produto por escalar são dados pela soma e produto usuais) quanto uma estrutura de corpo (na qual a soma e o produto são dados pela soma e produto usuais). Sejam p e q números primos distintos. É **correto** afirmar que:

A $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ são, necessariamente, não-isomorfos como espaços vetoriais e isomorfos como corpos.

B $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ são, necessariamente, isomorfos como espaços vetorias e isomorfos como corpos.

C $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ são isomorfos como espaços vetoriais se e só se são isomorfos como corpos.

D $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ são, necessariamente, não-isomorfos como espaços vetorias e não-isomorfos como corpos.

E $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ são, necessariamente, isomorfos como espaços vetoriais e não-isomorfos como corpos.

Questão 2. Em uma prova de Cálculo I, um aluno precisava encontrar uma primitiva para a função $t \mapsto t^2e^t$, com $t \in \mathbb{R}$. No entanto, ele havia esquecido como integrar por partes e escreveu a seguinte solução para o problema:

"Considere a derivação como um operador linear $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ do espaço vetorial real $C^1(\mathbb{R})$ de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 para o espaço vetorial real $C^0(\mathbb{R})$ de funções contínuas. Seja $W \subset C^1(\mathbb{R})$ o subespaço gerado pelas funções t^2e^t, te^t, e^t. Este subespaço é invariante pela ação de D. Seja M a matriz do operador linear $D|_W : W \to W$ escrita na base (t^2e^t, te^t, e^t), onde $D|_W$ denota a restrição de D ao subespaço W. Agora, a combinação linear dos elementos da base com coeficientes dados pela primeira coluna de M^{-1} fornece uma antiderivada da função t^2e^t."

Sobre a solução apresentada pelo aluno é **correto** afirmar que

A A solução apresentada está incorreta e o primeiro erro cometido é afirmar que o subespaço W é invariante pela ação de D.

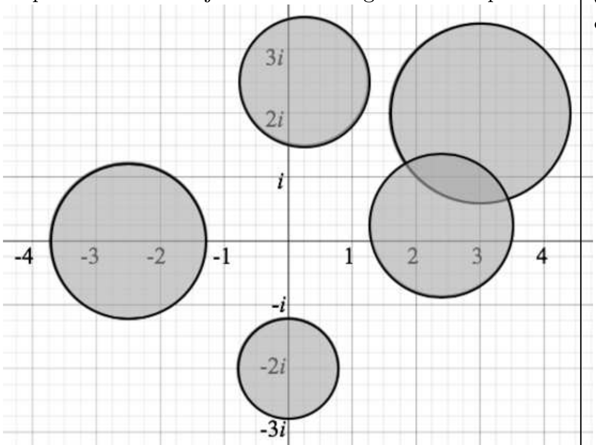
B A solução apresentada está correta e o aluno de fato calculou uma primitiva em questão sem utilizar integração por partes.

C A solução apresentada está incorreta e o primeiro erro cometido é afirmar que a combinação linear dos elementos da base com coeficientes dados pela primeira coluna de M^{-1} fornece uma antiderivada da função t^2e^t.

D A solução apresentada está incorreta e o primeiro erro cometido é afirmar que a matriz M é inversível.

E A solução apresentada está incorreta e o primeiro erro cometido é afirmar que D é um operador linear entre os espaços vetoriais $C^1(\mathbb{R})$ e $C^0(\mathbb{R})$.

Questão 3. Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$, com $n \geq 1$, munido com o produto interno usual (veja a definição de produto interno na Questão 4) e seja $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma transformação linear. Um conjunto de Gershgorin fraco de A é uma união de discos no plano complexo que contêm todos os autovalores complexos de A. Suponhamos que a figura abaixo representa um conjunto de Gershgorin fraco para A.



Considere as seguintes afirmações

I. A pode ser uma involução, isto é, $A^2 = I$. Aqui I denota a transformação identidade em $\mathbb{C}^n$.

II. A pode ser uma projeção, isto é, $A^2 = A$.

III. A pode ser uma isometria.

IV. A pode ser auto-adjunta.

V. A é inversível.

Assinale **quantas** das afirmações acima são verdadeiras.

A Uma.
B Cinco.
C Três.
D Duas.
E Quatro.

Questão 4. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido de um produto interno $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$, isto é, $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$, $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, $\langle cv, w \rangle = c\langle v, w \rangle$ e $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todos $u, v, w \in V$ e $c \in \mathbb{C}$. Seja $T : V \to V$ um operador linear autoadjunto satisfazendo $T(T - \mathrm{I}) = 0$, onde I e 0 denotam os operadores identidade e nulo de V, respectivamente. É **correto** afirmar que

A O operador T não é necessariamente uma projeção ortogonal sobre um subespaço de V, mas toda projeção ortogonal P sobre um subespaço de V é um operador autoadjunto satisfazendo $P(P - \mathrm{I}) = 0$.
B O operador T é necessariamente nulo ou a identidade.
C O operador T é necessariamente uma projeção ortogonal sobre um subespaço W de V e a dimensão de W é igual à dimensão do núcleo de T.
D O operador T é necessariamente uma projeção ortogonal sobre um subespaço W de V e a dimensão de W é igual à dimensão da imagem de T.
E O operador T não é necessariamente uma projeção ortogonal sobre um subespaço de V. Além disso, existe ao menos uma projeção ortogonal sobre um subespaço de V que não é um operador autoadjunto.

Questão 5. Considere $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n com coeficientes reais. Para $c \in \mathbb{R}$ arbitrário fixado, seja $W = \{p \in \mathcal{P}_n : p(c) = 0\}$. Temos que $\dim W$ é

A n.
B $n + 1$.
C 1, para todo n.
D $n - 1$.
E 2, para todo n.

Questão 6. Considere duas matrizes quadradas complexas A e B, de mesma ordem, tais que $B = A + \alpha I$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. onde I é a matriz identidade. Então, podemos afirmar que

A B tem menos autovalores do que A se $\alpha < 0$.
B A e B têm os mesmos autovalores.
C Pode ocorrer de A ser diagonalizável mas B não ser diagonalizável.
D B tem mais autovalores do que A se $\alpha > 0$.
E A e B têm os mesmos autovetores.

Questão 7. Seja $f :]1,5[\to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua tal que $f(2) = 3$ e $f(4) = 6$. Considere as seguintes afirmações acerca do conjunto $f(\,]1,5[\,)$

I. Ele é necessariamente um conjunto que contém $[3,6]$.

II. Ele é necessariamente um intervalo que contém $[3,6]$.

III. Ele é necessariamente um intervalo aberto que contém $[3,6]$.

IV. Ele é necessariamente um intervalo limitado que contém $[3,6]$.

V. Ele é necessariamente um intervalo aberto e limitado que contém $[3,6]$.

Indique **quantas** destas afirmações são verdadeiras:

A Cinco.
B Uma.
C Três.
D Quatro.
E Duas.

Questão 8. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais satisfazendo $3x_{n+1} = x_n+2$ para todo n. **Quantos** pontos de acumulação esta sequência possuí?

A Nenhum.
B Três.
C Um.
D Infinitos.
E Dois.

Questão 9. Considere a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Qual das seguintes afirmações é **falsa**

A $\lim_{n\to\infty} n^{-1}e^{s_n}$ diverge.
B $\lim_{n\to\infty} s_n$ diverge.
C $\lim_{n\to\infty} (s_n - \ln n)$ existe.
D $\lim_{n\to\infty} s_n^{-1}$ converge.
E $\lim_{n\to\infty} n^{-1}s_n = 0$.

Questão 10. Indique a afirmação **falsa**.

A Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$

B Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas tal que $f_n \to 0$ pontualmente em $[0,1]$ e tal que, para cada $x \in [0,1]$, a sequência $(f_n(x))$ é não-crescente. Então $f_n \to 0$ uniformemente em $[0,1]$.

C Sejam $f,g \in C^1([1,\infty))$ tais que f é limitada, $g'(x) \leq 0$ para todo $x \in [1,\infty)$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Então $\int_1^\infty f'(x)g(x)dx$ é convergente.

D Seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas não-negativas tal que $f_n \to 0$ pontualmente em $[0,1]$ e $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0$. Então $f_n \to 0$ uniformemente em $[0,1]$.

E Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e $x \in \mathbb{R}$ tais que qualquer subsequência (x_{n_k}) tem uma subquência que converge para x. Sob esta condição tem-se que $x_n \to x$.

Questão 11. Considere o conjunto $\mathcal{P}$ dos polinômios complexos p cujas únicas raízes complexas são $1, 2$ e i, e além disso $p(0) = \pi$ e $p'(2) = 0$. É **correto** afirmar que

A $\mathcal{P}$ possui exatamente dois polinômios de grau 4.
B $\mathcal{P}$ não possui polinômios de grau 5.
C $\mathcal{P}$ possui um polinômio de grau 3.
D $\mathcal{P}$ possui exatamente seis polinômios de grau 6.
E $\mathcal{P}$ é finito.

Questão 12. Considere as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Das afirmações abaixo

I. Tais funções são contínuas.

II. Existe uma função com esta propriedade satisfazendo $f(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2}f(1)$.

III. Se f é limitada no intervalo $[-1,1]$ então f é diferenciável em $\mathbb{R}$.

IV. Tais funções são da forma $f(x) = ax$ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.

V. A cardinalidade do conjunto de funções satisfazendo esta propriedade é maior que a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

quantas são verdadeiras?

A Duas.
B Uma.
C Quatro.
D Três
E Todas.

Questão 13. O **número** de elementos $x \in \mathbb{Z}/\langle 11\rangle$ satisfazendo a equação $x^{12} - x^{10} = 2$ é igual a

A Três.
B Dois.
C Cinco.
D Um.
E Quatro.

Questão 14. Considere os anéis

I. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, com as operações de soma e multiplicação definidas coordenada a coordenada.

II. $\mathbb{Q}[x^2, x^3]$.

III. $\mathbb{Z}/\langle p^2 \rangle$, onde p é primo.

Quais deles são domínios de integridade?

A apenas III.
B apenas II.
C apenas II e III.
D apenas I e II.
E apenas I e III.

Questão 15. Considere o anel $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com as operações de soma e multiplicação definidas coordenada a coordenada. **Quais** das seguintes afirmações

I. Todo ideal de A é principal.

II. Todo ideal primo de A é maximal.

III. Existem exatamente dois homomorfismos de anéis $\varphi : A \longrightarrow A$ que preservam o elementro neutro da multiplicação 1_A.

são verdadeiras?

A apenas II.
B apenas I e III.
C apenas II e III.
D apenas I e II.
E apenas I.

Questão 16. Se $n \geq 2$ é inteiro, denotamos por $\mathbb{U}_n$ o grupo das unidades do anel dos inteiros módulo n, ou seja, $\mathbb{U}_n$ é formado pelos elementos de $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ que têm inverso multiplicativo. Para $n \geq 3$, é **correto** afirmar que:

A $\mathbb{U}_n$ pode não ter elemento de ordem 2.
B $\mathbb{U}_{n^2} \cong \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_n$.
C o elemento $n - 1 \in \mathbb{U}_{n^2-n+1}$ tem ordem 3.
D $\mathbb{U}_n$ é um grupo cíclico.
E a recíproca do teorema de Lagrange não vale para $\mathbb{U}_n$.

Questão 17. Dos anéis quocientes a seguir, o único que **não** é corpo é:

A $\mathbb{Q}[x]/\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rangle$.
B $\mathbb{Q}[x]/\langle x^4 + 4 \rangle$.
C $\mathbb{Q}[x]/\langle x^4 + 12x^3 + 9x + 3 \rangle$.
D $\mathbb{Q}[x]/\langle x^3 + 5x^2 - 2x + 21 \rangle$.
E $\mathbb{Z}[x]/\langle 3, x^2 - 2x + 2 \rangle$.

Questão 18. Encontre a alternativa **falsa.**

A O grupo $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ não tem subgrupo isomorfo ao S_3.
B Os grupos $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\left\{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ são isomorfos.
C Os grupos $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ não são isomorfos.
D Os grupos $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}, +)$ são isomorfos.
E O grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tem um único subgrupo de ordem 6.

[redacted]

[redacted]

ome: [redacted]

ocumento: [redacted] Nro Inscr: [redacted]

olo: [redacted]

ssine aqui:______________________________

PROVA EXTRAMUROS 2019

FOLHA DE RESPOSTAS

As respostas devem ser marcadas nesta folha, caso contrário não serão consideradas.

Marque a resposta escolhida preenchendo **TOTALMENTE** o quadrado correspondente com caneta preta ou azul. **NÃO** marque apenas um X.

Questão 1:	A	B	C	D	E	**Questão 10:**	A	B	C	D	E
Questão 2:	A	B	C	D	E	**Questão 11:**	A	B	C	D	E
Questão 3:	A	B	C	D	E	**Questão 12:**	A	B	C	D	E
Questão 4:	A	B	C	D	E	**Questão 13:**	A	B	C	D	E
Questão 5:	A	B	C	D	E	**Questão 14:**	A	B	C	D	E
Questão 6:	A	B	C	D	E	**Questão 15:**	A	B	C	D	E
Questão 7:	A	B	C	D	E	**Questão 16:**	A	B	C	D	E
Questão 8:	A	B	C	D	E	**Questão 17:**	A	B	C	D	E
Questão 9:	A	B	C	D	E	**Questão 18:**	A	B	C	D	E