Prova de seleção ao Mestrado e/ou Programa de Verão

Programas: ICMC-USP, UFAL, UFRJ

Nome: ____________________

Identidade (Passaporte): ____________________

Assinatura: ____________________

Instruções

(i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.

(ii) 25 porcento da pontuação total é da parte I (Perguntas dissertativas).

BOA PROVA!

Respostas da Parte II

Questão	Alternativa	Questão	Alternativa	Questão	Alternativa
1^a		7^a		13^a	
2^a		8^a		14^a	
3^a		9^a		15^a	
4^a		10^a		16^a	
5^a		11^a		17^a	
6^a		12^a		18^a	

Parte I: Questões dissertativas

Questão 1. Para $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, seja $a > 0$ e

$$L = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon a}^{\epsilon b} \frac{f(x)}{x} dx,$$

prove que $L = f(0) ln(b/a)$

Questão 2. Seja S_3 o grupo simétrico das $3! = 6$ permutações dos números $1, 2, 3$. Seja $f \colon S_3 \to \mathbb{C}^\times$ um morfismo entre S_3 e o grupo multiplicativo $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(a) Mostre que a imagem de f está contida no subgrupo de $\mathbb{C}^\times$

$$\mu_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\} = \{e^{2\pi i k} \mid k = 0, 1, \ldots, 5\}$$

das raízes sextas da unidade.

(b) Determine todos os morfismos $f \colon S_3 \to \mathbb{C}^\times$.

Parte II: Questões de múltipla escolha

Questão 1. Considere as seguintes afirmações:

(1) Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é linear e T é não nula, então existem pelo menos 2 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^4$ que não estão em $Im(T)$.

(2) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é linear e T é não nula, então é sobrejeetiva.

(3) Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é linear, então $dim\, Nuc(T) \neq dim\, Im(T)$.

As afirmações corretas são somente:

a) (1)

b) (2) e (3)

c) (1) e (2)

d) (2)

e) (1) e (3)

Questão 2. Indique qual das seguintes afirmações é falsa.

(a) Se $T : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ é linear e $\|Tx\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbf{C}^n$, então $\|T^{-1}x\| = \|x\|$, para todo $x \in \mathbf{C}^n$.

(b) Seja W subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$, $dim\, W = 1$. Então não existe um mapa linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, com $Nuc(T) = W$.

(c) Toda base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2, tem um polinômio de grau 1.

(d) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear injetora, então T é sobrejetora.

(e) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear e $T^k = 0$ para algum $k > 0$, então T tem um autovalor $\lambda = 0$.

Questão 3. Considere as seguintes afirmações:

1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e X um subespaço de $\mathbb{R}^m$. Então $T^{-1}(X)$ pode não ser subespaço. Onde $T^{-1}(X) = \{v \in \mathbb{R}^n : T(v) \in X\}$.
2. Seja W subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, $dim\, W = 1$. Então existe um mapa linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, com $Nuc(T) = W$.
3. Se M é uma matriz real $n \times n$ tal que $M = M^t$, então existe uma base de $\mathbb{R}^n$, formada por autovetores ortonormais de M.
4. Seja M é uma matriz real $n \times n$. Então M e M^t sempre comutam.

As afirmações corretas são somente:

a) (1) e (2)

b) (4)

c) (2)

d) (2) e (3)

e) (3)

Questão 4. Sejam A e B matrizes reais de tamanhos 5×7 e 7×5, respectivamente. Se $\det C$ e $\operatorname{tr} C$ denotam respectivamente o determinante e o traço (i.e., a soma dos elementos na diagonal principal) de uma matriz quadrada C, então podemos afirmar que

(a) $\det(AB) = 0$

(b) $\det(BA) = 0$

(c) $\operatorname{tr}(BA) = 0$

(d) $\operatorname{tr}(AB) = 0$

(e) $\det(AB) = \det(BA)$

Questão 5. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita n munido de um produto interno $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Definimos uma transformação linear $S : V \to V$ através da expressão

$$\langle Su, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall\, u, v \in V.$$

Fixada uma base para V, denotemos por M_T e M_S as matrizes de T e S nesta base. É **incorreto** afirmar que:

(a) T é uma isometria se e só se S é uma isometria.

(b) Se T é uma isometria, então $\det M_S = \pm 1$ e $\operatorname{tr} M_S M_T = n$.

(c) $\operatorname{tr} M_T = \operatorname{tr} M_S$.

(d) $\det M_T = \det M_S$ somente se S é uma isometria.

(e) As matrizes M_T e M_S dependem da base escolhida para V.

Questão 6. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{C}$. Uma função $f\colon V \to \mathbb{C}$ é dita $\mathbb{C}$-*anti-linear* se f é $\mathbb{R}$-linear e

$$f(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \overline{\lambda} \cdot f(\mathbf{v}) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{v} \in V)$$

onde $\overline{\lambda}$ denota o conjugado de λ. Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(a) Se f é $\mathbb{C}$-linear então $g\colon V \to \mathbb{C}$ dada por $g(\mathbf{v}) = \overline{f(\mathbf{v})}$ é $\mathbb{C}$-anti-linear.

(b) Se $f\colon V \to \mathbb{C}$ é uma função $\mathbb{R}$-linear então $g\colon V \to \mathbb{C}$ dada por $g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) - i \cdot f(i \cdot \mathbf{v})$ é $\mathbb{C}$-anti-linear.

(c) Se $f\colon V \to \mathbb{C}$ é uma função que é simultaneamente $\mathbb{C}$-linear e $\mathbb{C}$-anti-linear, então f é identicamente nula.

(d) Toda função $\mathbb{R}$-linear $f\colon V \to \mathbb{C}$ é a soma de uma função $\mathbb{C}$-linear e uma função $\mathbb{C}$-anti-linear.

(e) O conjunto de todas as funções $\mathbb{C}$-anti-lineares $f\colon V \to \mathbb{C}$ é um espaço vetorial real de dimensão n.

Questão 7. Seja p um primo. Quantos subgrupos de ordem p possui o grupo aditivo

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}?$$

(a) $p^2 - p$

(b) $p - 1$

(c) $p + 1$

(d) p

(e) $p^2 - 1$

Questão 8. Qual dos seguintes itens contém um par de grupos isomorfos?

(a) $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$

(b) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(c) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$

(d) $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{Z}, +)$

(e) S_4 e D_4

Questão 9. Considere o grupo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

com o produto usual de complexos e o subgrupo $N = \{\pm 1, \pm i\}$. Então o grupo quociente S^1/N é isomorfo a

(a) $\mathbb{R}^\times$ com o produto usual dos reais.

(b) $\mathbb{C}^\times$ com o produto usual dos complexos.

(c) S^1

(d) $GL_2(\mathbb{R})$ (matrizes 2×2 inversíveis com o produto usual de matrizes)

(e) $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$

Questão 10. Seja $\mathbb{Q}[x]$ o anel dos polinômios com coeficientes racionais. Então o anel quociente

$$\frac{\mathbb{Q}[x]}{(4x^5+2x^2+3x+1)},$$

visto como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$, tem dimensão

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

(e) infinita

Questão 11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela expressão

$$f(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

onde $g(x) = \int\limits_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ e $h(x) = \int\limits_1^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Então $f'(1)$ vale:

(a) 0

(b) $\frac{1}{e}$

(c) $-\frac{1}{e}$

(d) e

(e) $-e$

Questão 12. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ se } x \text{ é racional e } x = \frac{p}{q} \text{ em termos reduzidos com } q > 0 \\ 0 \text{ se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

É **correto** afirmar que:

(a) f é descontínua em todos os números racionais e contínua em todos os irracionais.

(b) f é descontínua em todos os reais.

(c) f é contínua em todos os reais.

(d) f não é Riemann integrável no intervalo $[0, 1]$.

(e) f é Riemann integrável no intervalo $[0, 1]$ e $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}$.

Questão 13.
Considere as seguintes afirmações:

(1) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável Riemann, então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^c f(t)dt = \int_c^b f(t)dt.$$

(2) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é tal que $f \geq 0$ e

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

então $f(x) = 0$ em $[a, b]$.

(3) Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e positiva, então

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Indique a opção correta:

a) As afirmações (1) e (2) são verdadeiras e a (3) é falsa.

b) As afirmações (2) e (3) são verdadeiras e a (1) é falsa.

c) As afirmações (1) e (3) são verdadeiras e a (2) é falsa.

d) As três afirmações são verdadeiras.

Questão 14. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $I \subset \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(1) Se a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbf{n}} \subset I$ é de Cauchy, então a sequência $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{n}} \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy.

(2) Se $I = [a, \infty)$ então f pode não ser uniformemente contínua.

(3) A função $|f| : I \to \mathbb{R}$, definida através de $|f|(x) = |f(x)|$ é contínua.

(4) Se $I = [0,2]$ e $f(0) = f(2)$, então existem x_1, x_2 com $x_1 - x_2 = 1$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

Assinale a opção correta:

a) As afirmações (1) e (3) são falsas.

b) As afirmações (1), (2) e (4) são verdadeiras.

c) A afirmação (1) é falsa e as afirmações (2) e (4) são verdadeiras.

d) Só as afirmações (2) e (4) são verdadeiras.

e) Só as afirmações (2) e (3) são verdadeiras.

Questão 15. Seja I_n uma sequência de intervalos fechados limitados não vazios em $\mathbb{R}$. Suponha ainda que $I_n \supset I_{n+1}$ para todo n. Qual das seguintes afirmações é verdadeira sobre

$$T = \bigcap_{n\geq 1} I_n?$$

(a) T pode ser aberto ou fechado

(b) T pode ser vazio

(c) T é necessariamente fechado e não vazio

(d) T contém necessariamente um intervalo fechado

(e) T não pode conter um intervalo fechado

Questão 16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$. Em qual item f poderá **NÃO** assumir necessariamente um valor mínimo?

(a) Se $x_n \to x$ então $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$.

(b) f é contínua em $\mathbb{R}^m$.

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^m$.

(d) Para todo $r > 0$, $f(\overline{B}_r(0))$ é fechado.

(e) Para todo $r > 0$, $f(\overline{B}_r(0))$ é compacto.

Questão 17. Usando o Teorema de derivação de séries termo-a-termo, podemos afirmar que a soma $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ é igual a:

1. 2
2. 1
3. $\frac{1}{2}$
4. 4
5. Nenhuma das Respostas Anteriores.

Questão 18. Sobre um grupo cíclico de ordem maior que 1, é incorreto afirmar que:

1. É sempre abeliano.
2. Possui subgrupos normais não-triviais.
3. Possui subgrupos de índice primo.
4. Tem sempre ordem infinita.
5. Possui subgrupos de ordem prima.