

CORRECTED

PROVA EXTRAMUROS - 2018

NOME: \_\_\_\_\_

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): \_\_\_\_\_

ASSINATURA: \_\_\_\_\_

---

---

INSTRUÇÕES

- (i) O tempo destinado a esta prova é de 5 horas.
  - (ii) A Parte I (duas questões dissertativas) corresponde a 25% da pontuação total da prova.
  - (iii) Cada questão de múltipla escolha (Parte II) vale 5 pontos.
  - (iv) Não se esqueça de transcrever as respostas das questões de múltipla escolha para a **FOLHA DE RESPOSTAS** (última folha da prova). O seu nome, sua identidade (ou passaporte) e sua assinatura também devem estar presentes na folha de respostas.
  - (v) As questões de múltipla escolha serão corrigidas por leitura óptica. **ATENÇÃO! Preencha os quadrados por completo (não basta fazer um “X”) e utilize caneta preta ou azul.**
- 
- 

**BOA PROVA!**

CORRECTED

## PARTE I: QUESTÕES DISSERTATIVAS

**Questão 1.** Seja  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Defina a sequência de funções

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt, \quad \text{para todo } x \in [0, 1] \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mostre que:

- (I)  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.
- (II) A sequência  $(f_n)$  converge para  $f$  uniformemente em  $[0, 1]$ .

CORRECTED

**Questão 2.** Seja  $G$  um grupo abeliano finito. Mostre que:

- (I) Se  $p$  é um primo tal que  $p \mid |G|$ , então  $G$  tem elemento de ordem  $p$ .
- (II) Se  $n \mid |G|$ , então  $G$  tem subgrupo de ordem  $n$ .
- (III) Se  $n \mid |G|$ , então o número de soluções da equação  $x^n = 1$  em  $G$  é múltiplo de  $n$ .

CORRECTED

CORRECTED

CORRECTED

## PARTE II: QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA

**Questão 1** Indique a afirmação **falsa**.

- a) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, monótona e contínua, então  $f$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ .
- b) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ , então existem  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$  tais que  $|f(x)| \leq a|x| + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e existem constantes  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$  tais que  $|f(x)| \leq a|x| + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$ .
- d) Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $I$ . Se  $f'$  é limitada em  $I$ , então  $f$  é uniformemente contínua em  $I$ .
- e) Sejam  $K \subset \mathbb{R}$  um compacto e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então  $f$  é uniformemente contínua em  $K$ .

**Questão 2** Indique a afirmação **falsa**.

- a) Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, tal que  $f(x) \neq 0$  para cada  $x \in (0, 1)$  e  $(f(x))^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$  para cada  $x \in [0, 1]$ . Então  $f(x) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$ .
- b) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e não negativa. Então
- $$\left( \int_a^b f(x) \cos(x) dx \right)^2 + \left( \int_a^b f(x) \sin(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2.$$
- c) Seja  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  contínua. Se existir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f(x))^n dx = L \in \mathbb{R}$ , então  $f(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0, 1]$ .
- d) Sejam  $c > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  derivável. Se  $cf(x) + f'(x) \leq 0$  para todo  $x$ , então  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- e) Seja  $f : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  contínua tal que  $\int_0^\infty f(x) dx$  é convergente. Então  $\int_0^\infty (f(x))^2 dx$  é convergente.

**Questão 3** Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais tal que  $|a_n - 1| \leq 2^{-n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Considere a série de potências centrada em 0 dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

e indique a afirmação **falsa**.

- a) Esta série de potências não converge em  $x = -1$ .
- b) O raio de convergência desta série é 1.
- c) Existe uma função derivável  $g(x)$  em  $[-0.5, 0.5]$  de modo que  $f(x) = \frac{1}{1-x} + g(x)$  para todo  $x$  em  $[-0.5, 0.5]$ .
- d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$ .
- e)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ .

**Questão 4** Considere o conjunto  $S$  de todos os números reais  $x \in [0, 1]$  que têm uma expansão decimal da forma

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$$

onde todos os dígitos  $d_i$  estão no conjunto  $\{0, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ . Indique a afirmação **falsa**.

- a)  $S$  é um conjunto fechado.
- b) Há uma bijeção entre  $S$  e  $[0, 1]$ .
- c) Se  $A$  é um aberto de  $\mathbb{R}$  tal que  $A \cap S \neq \emptyset$ , então  $A \cap S$  é não enumerável.
- d) Existe um intervalo aberto não vazio inteiramente contido em  $S$ .
- e)  $S$  possui infinitos elementos que são números racionais.

**Questão 5** Seja  $x_0, x_1, x_2, \dots$  uma sequência convergente de números reais tal que para todo  $n$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} + x_n - \frac{1}{2}.$$

Seja  $L$  o limite desta sequência. Indique a afirmação **falsa**.

- a)  $L \in \{-1, 1\}$ .
- b) Se  $L = -1$ , então existe  $n_0$  tal que  $x_n = -1$  para todo  $n \geq n_0$ .
- c) Existem  $\lambda \in (0, 1)$  e  $C > 0$  tais que para todo  $n$

$$|L - x_n| \leq C\lambda^n.$$

- d) Se  $L = 1$ , então existe  $n_0$  tal que  $x_n = 1$  para todo  $n \geq n_0$ .
- e) Existem dois valores de  $x_0$ , digamos  $a$  e  $b$ , tais que as sequências definidas a partir de  $x_0 = a$  e  $x_0 = b$  são não-constantes, o limite da sequência começando em  $a$  é  $-1$ , e o limite da sequência começando em  $b$  é  $1$ .

**Questão 6** Seja  $V = \mathbb{R}[t]$  o espaço vetorial real das funções polinomiais  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $D : V \rightarrow V$  o operador derivação,  $D(p)(t) = p'(t)$ , e seja  $T : V \rightarrow V$  o operador definido por  $T(p)(t) = tp(t)$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $D$  é sobrejetor.
- (II)  $D$  é injetor.
- (III)  $T$  é sobrejetor.
- (IV)  $T$  é injetor.
- (V)  $\ker(D) = \{p \in V : p(0) = 0\}$ .
- (VI)  $\text{Im}(T) = \{p \in V : p(0) = 0\}$ .

Dentre as alternativas abaixo, assinale a **correta**:

- a) (I), (III) e (IV) são verdadeiras.
- b) (II), (III) e (V) são falsas.
- c) (I), (V) e (VI) são verdadeiras.
- d) (II), (V) e (VI) são falsas.
- e) (II), (III) e (IV) são verdadeiras.

**Questão 7** Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $n > 1$  com  $n$  autovalores distintos. Seja  $B \neq I_n$  uma matriz que comuta com  $A$ , onde  $I_n$  representa a matriz identidade de ordem  $n$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I)  $B$  tem os mesmos autovalores de  $A$ .
- (II) Todos os autovetores de  $A$  são autovetores de  $B$ .
- (III)  $B$  tem autovalor nulo se  $A$  tem autovalor nulo.
- (IV) A forma de Jordan de  $B$  é uma matriz diagonal.
- (V) O produto  $AB$  não é diagonalizável.

Dentre as alternativas abaixo, assinale a **correta**:

- a) (I), (II) e (IV) são verdadeiras e as demais são falsas.
- b) (II), (III) e (V) são verdadeiras e as demais são falsas.
- c) (I) e (IV) são verdadeiras e as demais são falsas.
- d) (II) e (IV) são verdadeiras e as demais são falsas.
- e) (III) e (V) são verdadeiras e as demais são falsas.

**Questão 8** Seja  $V$  o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial formado por todas as sequências numéricas da forma  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  com  $a_i \in \mathbb{R}$ . A adição e a multiplicação por escalar são definidas termo a termo, isto é,  $(a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$  e  $r(a_0, a_1, a_2, \dots) := (ra_0, ra_1, ra_2, \dots)$  para todo  $r \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$W := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in V \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ para todo natural } n \geq 0\}.$$

Seja  $\phi := \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . A seguinte afirmação é **correta**:

- a**  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  e possui dimensão finita. Os vetores  $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$  e  $v_2 := (1, 1 - \phi, (1 - \phi)^2, (1 - \phi)^3, \dots)$  pertencem a  $W$  e são linearmente independentes, mas não geram  $W$ .
- $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  e possui dimensão finita. Os vetores  $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$  e  $v_2 := (1, 1 - \phi, (1 - \phi)^2, (1 - \phi)^3, \dots)$  pertencem a  $W$  e constituem uma base para  $W$ .
- c**  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  e possui dimensão finita. Os vetores  $v_1 := (1, \phi, \phi^2, \phi^3, \dots)$  e  $v_2 := (1, 1 - \phi, (1 - \phi)^2, (1 - \phi)^3, \dots)$  não pertencem a  $W$ .
- d**  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  e possui dimensão infinita.
- e**  $W$  não é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Questão 9** Seja  $P_n$  o  $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de polinômios com coeficientes reais de grau  $\leq n$ . Introduzimos um produto interno em  $P_n$  através da fórmula

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad p, q \in P_n.$$

Seja  $T : P_n \rightarrow P_n$  o operador linear definido por  $T(p)(t) := ((1 - t^2)p'(t))'$  para  $p \in P_n$  e seja  $r_j(t) := \frac{d^j}{dt^j}(1 - t^2)^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . O polinômio  $r_j(t)$  satisfaz a equação diferencial  $(1 - t^2)r_j''(t) - 2tr_j'(t) + j(j + 1)r_j = 0$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ . Considere as seguintes afirmações:

- (I) O operador  $T$  é auto-adjunto.
- (II) Para  $i \neq j$ ,  $\langle r_i, r_j \rangle = 0$ .
- (III)  $r_0, \dots, r_n$  formam uma base para  $P_n$ .
- (IV) O complemento ortogonal de  $P_{k-1}$  em  $P_k$  é gerado por  $r_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Podemos afirmar que

- a** (I) e (III) são corretas mas (II) e (IV) são incorretas.
- b** (I) e (II) são corretas mas (III) e (IV) são incorretas.
- c** (II) e (III) são corretas mas (I) e (IV) são incorretas.
- d** (I) e (IV) são corretas mas (II) e (III) são incorretas.
- Todas as alternativas são corretas.

**Questão 10** Uma *seqüência exata* de espaços vetoriais  $V_i$  de dimensão finita

$$0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} V_4 \xrightarrow{T_4} 0$$

é uma seqüência de transformações lineares  $T_i$  tais que  $\ker T_{i+1} = \text{im } T_i$  para  $i = 0, 1, 2, 3$  (denotamos por 0 o espaço vetorial nulo). Se na seqüência exata acima  $\dim V_i = d_i$ , então é sempre verdade que

a)  $d_1 = d_2 + d_3 + d_4$ .

b)  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

c)  $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$ .

d)  $d_4 = d_1 + d_2 + d_3$ .

e)  $d_1 + d_2 \geq d_3 + d_4$ .

**Questão 11** Considere os seguintes ideais de  $\mathbb{Z}[X]$ :  $I = \langle X^2 - 2 \rangle$ ,  $J = \langle 7, X^2 + 1 \rangle$  e  $K = \langle X^2 - 3, 5 \rangle$ . Assinale a alternativa **correta**.

a)  $I$  e  $K$  são maximais e  $J$  não é primo.

b)  $K$  é primo, mas  $I$  e  $J$  não são primos.

c)  $I$  é primo,  $K$  é maximal e  $J$  não é primo.

d) Nenhum dos ideais é maximal.

e) Todos os ideais são primos.

**Questão 12** Seja  $S_n$  o grupo simétrico em  $n$  letras. Assinale a alternativa **incorreta**.

a) Todo  $\sigma \in S_n$  dado por um ciclo de tamanho ímpar é uma permutação par.

b) Seja  $\sigma \in S_n$  um ciclo de tamanho  $k$ . Se  $k$  e  $m$  são coprimos, então  $\sigma^m$  é um ciclo de tamanho  $k$ .

c) Quaisquer dois ciclos do mesmo tamanho em  $S_n$  são conjugados.

d) O grupo de automorfismos de  $A_n$  não tem subgrupo isomorfo à  $S_n$ .

e) Para  $n \geq 5$ ,  $A_n$  é o único subgrupo normal não trivial de  $S_n$ .

**Questão 13** Seja  $D_n$  o grupo diedral de ordem  $2n$ , onde  $n \geq 3$ . Assinale a alternativa **incorreta**.

a) Existe um monomorfismo de  $D_n$  em  $S_n$ .

b) Se  $n$  é par, então  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  é isomorfo a um subgrupo de  $D_n$ .

c)  $D_n$  tem um subgrupo normal de ordem 2.

d)  $D_n$  tem um subgrupo normal de ordem  $n$ .

e)  $D_n$  é gerado por dois elementos de ordem 2.

**Questão 14** Seja  $G$  um grupo e considere as seguintes afirmações:

- (I) Se  $H \leq G$  e  $K \trianglelefteq G$ , então  $HK \trianglelefteq G$ .
- (II) Se  $S$  é subconjunto de  $G$ , então  $C_G(S) = C_G(C_G(C_G(S)))$ . Aqui  $C_G(X)$  representa o centralizador de  $X$  em  $G$ .
- (III) Se  $M$  é subgrupo maximal de  $G$ , então  $Z(G) \leq M$  ou  $M \trianglelefteq G$ .
- (IV)  $\text{Aut}(G \times G) \simeq \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(G)$ .
- (V) Se  $H, K \trianglelefteq G$ , então  $G/(H \cap K)$  é isomorfo a um subgrupo de  $G/H \times G/K$ .

Assinale a alternativa onde todos os itens são verdadeiros.

- a) (I), (II), (V).
- b) (II), (III), (V).
- c) (I), (II), (III).
- d) (II), (III), (IV).
- e) (III), (IV), (V).

**Questão 15** Assinale a alternativa **incorreta**.

- a) Se  $K = \frac{\mathbb{Z}}{\langle 11 \rangle}$ , então o grupo multiplicativo de  $K$  é cíclico e tem 4 subgrupos.
- b) Existe um anel  $A$  para o qual o polinômio  $p(x) = x^3 - x \in A[x]$  tem pelo menos 4 distintas raízes em  $A$ .
- c) O polinômio  $p(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 10x + 2018$  é irredutível em  $\mathbb{Q}[x]$ .
- d) Se  $K = \mathbb{F}_{13}$  é o corpo finito de 13 elementos, então existe  $p(x) \in K[x]$  de grau 3 para o qual  $\#\{p(\alpha) : \alpha \in \mathbb{F}_{13}\} < 5$ .
- e) Se  $A[x]$  é domínio de ideais principais, então  $A$  é um corpo.

PROVA EXTRAMUROS - 2018

FOLHA DE RESPOSTAS

NOME: \_\_\_\_\_

IDENTIDADE (OU PASSAPORTE): \_\_\_\_\_

ASSINATURA: \_\_\_\_\_

---

---

As respostas das questões de múltipla escolha devem ser marcadas NESTA folha.  
Respostas no caderno de questões NÃO serão consideradas!

QUESTÃO 1:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 2:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 3:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 4:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 5:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 6:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 7:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 8:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 9:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 10:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 11:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 12:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 13:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 14:  a  b  c  d  e

QUESTÃO 15:  a  b  c  d  e