PROVA EXTRAMUROS-DOUTORADO – 2018

Nome: ________________________________

Identidade (passaporte): __________________________

Assinatura: ______________________________

Instituição onde a prova foi aplicada: __________________

OBSERVAÇÃO: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(n \geq 2)$, funções contínuas. Suponha que o conjunto

$$\mathcal{C}_{f=g} := \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) = g(x)\big\}$$

é limitado e não vazio. Considere os conjuntos

$$\mathcal{C}_{f\leq g} := \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) \leq g(x)\big\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_{f\geq g} := \big\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) \geq g(x)\big\}.$$

(a) Prove que um dos conjuntos $\mathcal{C}_{f\leq g}$ ou $\mathcal{C}_{f\geq g}$ é compacto.

(b) Prove que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) - f(x_0) \leq g(x) - g(x_0) \quad \text{ou} \quad g(x) - g(x_0) \leq f(x) - f(x_0),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ e, além disso,

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\, x \neq 0 \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\alpha\|x\|^2 \leq f(x) \leq \beta\|x\|^2, \quad \forall\, x \neq 0.$$

(b) Determine a imagem de f, justificando sua resposta.

(c) Diga se f é diferenciável em $x = 0$, justificando sua resposta.

Questão 3. Calcule o valor aproximado (com 4 casas decimais) para a solução de

$$x^7 + 0,99x - 2,03 = 0,$$

dando uma estimativa para o erro.

Questão 4. Sejam $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 e $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função de classe C^2 tais que

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ \ \Delta\phi = 0 \ \text{ em } \ B_1(0) \ \text{ e } \ \mathbf{u} \cdot \nu = \nabla\phi \cdot \nu \ \text{ sobre } \ \partial B_1(0),$$

onde $B_1(0)$ é a bola aberta de raio 1 e centro na origem, $\partial B_1(0)$ sua fronteira e ν é o vetor unitário normal exterior.

Mostre que

$$\int_{B_1(0)} \mathbf{u}(x) \cdot \nabla\phi(x)\, dx = \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(x)|^2\, dx$$

e conclua que

$$\int_{B_1(0)} |\mathbf{u}(x)|^2\, dx \geq \int_{B_1(0)} |\nabla\phi(x)|^2\, dx.$$

Questão 5. Considere o retângulo $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,2]$ e $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável.

(a) Enuncie o Teorema de Fubini para

$$I = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, dxdy.$$

(b) Podemos aplicar o Teorema de Fubini para $f(x,y) = e^{xy}$? Justifique sua resposta.