[redacted]

PROVA EXTRAMUROS-MESTRADO 2022
12.11.2022

Questão 1 [q1]. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem dois com coeficientes reais. Recorde que o traço de uma matriz $M = (M_{jk})_{j,k=1,2} \in M_2(\mathbb{R})$ é dado por $\mathrm{Tr}(M) = M_{11} + M_{22}$. Sejam $A_{jk} : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $j,k = 1,2$ funções de classe C^1, e considere a função matricial $A = (A_{jk})_{j,k=1,2} : (-1,1) \to M_2(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

(1) Para todo $m \geq 1$, a função $x \mapsto \mathrm{Tr}(A(x)^m)$ é diferenciável.

(2) Se $A(0)$ é a matriz identidade e, para algum $\delta > 0$, vale $\det A(x) = 1$ para $|x| < \delta$, então $A'_{11}(0) = -A'_{22}(0)$.

(3) Se $\det A(0) \neq 0$, então a matriz $A(x)$ é invertível para todo x suficientemente próximo de 0.

(4) A função $x \mapsto |\det A(x)|$ é diferenciável.

Qual, dentre as opções abaixo, corresponde a afirmações que não são sempre verdadeiras?

A (2)

B (3)

[redacted] (4)

D (1) e (3)

E (2) e (4)

Questão 2 [q2]. Considere a seguinte sequência

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \cdots \right).$$

Qual dentre as seguintes afirmações é correta?

A A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ converge.

B A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tem um número finito de pontos de acumulação.

[redacted] A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é densa em $[0,1]$.

D A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ não possui subsequência decrescente.

E A sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é sequência de Cauchy.

Questão 3 [q3]. Sejam $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ duas funções limitadas e estritamente monótonas, com $f(1) \neq g(1)$. Considere as sequências (a_n) e (b_n) determinadas por

$$a_n = f(n) \quad \text{e} \quad b_n = g(n), \quad n \geq 1.$$

Sabe-se que existe um único ponto $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$c \in [a_n, b_n], \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Qual das seguintes afirmações é falsa?

A $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

B Os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ existem e são iguais.

[redacted] f é decrescente e g é crescente.

D $f(x) \neq g(y)$ para quaisquer $x, y \in [1,+\infty)$.

E $\sup_{x\geq 1} f(x) = \inf_{x\geq 1} g(x)$.

Questão 4 [q4]. Sejam $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funções reais. Assuma que f_n, f sejam diferenciáveis. Sobre as afirmações

(1) a convergência $f_n \to f$ vale pontualmente

(2) a convergência $f_n \to f$ vale uniformemente

(3) a convergência

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{vale}$$

(4) a convergência $f'_n \to f'$ vale pontualmente

é correto afirmar que

A (1) implica (3), e (2) implica (1).

B (2) implica (1), e (2) também implica (4).

C (4) implica (3), e (2) implica (3).

[redacted] (2) implica (1), e (2) implica (3).

E (1) e (3) combinadas implicam (2).

[redacted]

Questão 5 [q5]. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com f e f' sendo limitadas. Considere as seguintes afirmações:

(1) Para todo $x \in \mathbb{R}$, o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

existe.

(2) Existe uma constante $M > 0$ tal que para todo $h > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}\right| \leq M.$$

(3) O limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$.

Qual dentre as alternativas abaixo contempla todas as afirmações que são sempre verdadeiras?

- A (1)
- B (2)
- C (3)
- D (1) e (2)
- ■ (1), (2) e (3)

Questão 6 [q6]. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, que assume valores positivos e negativos, e defina

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

(1) Se $f(1) = 0$ e $f'(1) \neq 0$, então f^+ não é diferenciável em $x = 1$.

(2) $(f^+)^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

(3) Se f for uniformemente contínua, então f^+ também será.

(4) Se $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < +\infty$, então $\int_{-\infty}^{+\infty} (f^+(x))^2 dx < +\infty$.

Quantas das afirmações acima são sempre verdadeiras?

- A nenhuma
- B uma
- C duas
- ■ três
- E quatro

Questão 7 [q7]. Considere os vetores $v_1 = (1, 2, -2), v_2 = (1, -1, 4)$ e

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{n}(a, b, -b), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{n}(c, a, b), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{n}(b, -b, d).$$

Marque a alternativa que dá a sequência (n, a, b, c, d) para a qual $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é um conjunto de geradores para o espaço gerado por v_1 e v_2.

- ■ $(3, 1, 2, 2, -1)$
- B $(\sqrt{2}, 0, 1, 1, 0)$
- C $(1, 1, 0, 0, 1)$
- D $(\sqrt{3}, 1, 1, 1, -1)$
- E Nenhuma das demais alternativas.

Questão 8 [q8]. Considere os operadores T e S de $\mathbb{R}^3$ cujas leis são

$$T(x, y, z) = (x, -x+2y, 2z), \; S(x, y, z) = (x, x+z, x-y).$$

Qual das seguintes afirmativas é a verdadeira?

- ■ T admite infinitas retas invariantes.
- B S admite infinitas retas invariantes.
- C S e T são operadores diagonalizáveis.
- D S e T admitem em comum duas retas invariantes.
- E S e T não têm autovalor comum.

Questão 9 [q9]. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador autoadjunto e I o operador identidade em $\mathcal{V}$. Considere as afirmações abaixo.

(1) O operador $T^2 + 2T + 4I$ é um isomorfismo.

(2) Para todo $v \in \mathcal{V}$ tem-se $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$.

(3) Se B é uma base de $\mathcal{V}$, então a matriz de T com relação a B é uma matriz simétrica.

(4) Se $T^2 = T$, então T é uma projeção ortogonal.

Pode-se dizer que

- A nenhuma afirmação é verdadeira.
- B somente uma afirmação é verdadeira.
- C somente duas afirmações são verdadeiras.
- ■ somente três afirmações são verdadeiras.
- E as quatro afirmações são verdadeiras.

Questão 10 [q10]. Seja $M_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem dois com coeficientes reais. Considere as transformações lineares $S : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $S(A) = AM - MA$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(A) = NA$, sendo $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Se $\mathfrak{S}$ é a dimensão do núcleo de S e $\mathfrak{R}$ é a dimensão da imagem de T, então $\mathfrak{S} - \mathfrak{R}$ é igual a

- ■ 0
- B -1
- C 1
- D -2
- E 2

[redacted]

Questão 11 [q11]. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

(A) Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo com produto interno, $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear autoadjunto e $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ o operador identidade. Então $I + iT$ é injetor.

(B) Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Se $f, g : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ são funcionais lineares tais que $\{v \in \mathcal{V}; f(v) = 0\} = \{v \in \mathcal{V}; g(v) = 0\}$, então existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tal que $f = \alpha g$.

(C) Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear autoadjunto. Se B é uma base de $\mathcal{V}$, então a matriz de T com relação a esta base é uma matriz diagonal.

(D) Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real com produto interno e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Se $\langle Tv, v \rangle = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}$, então $T = 0$.

A (A), (B) e (C).
[redacted] (A) e (B).
C (B), (C) e (D).
D (A), (B) e (D).
E (A), (B), (C) e (D).

Questão 12 [q12]. Considere as seguintes afirmativas:

(A) O conjunto de todas as funções $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, considerado com a soma de funções e produto de escalar por função usuais, é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

(B) Se $\dim V > 0$ e $T : V \to V$ é um operador linear tal que $T^2 = 0$, então T não é um isomorfismo.

(C) Se $0 < \dim V < \infty$ e $T : V \to V$ é um operador linear tal que $T^2 = 0$, então $S = I_V + T$ é um isomorfismo.

(D) O operador linear $T : P_n \to P_n$ do espaço dos polinômios P_n em uma variável real de grau menor ou igual a n, definido por $T(p)(x) = p(x) + xp'(x)$, é um isomorfismo.

(E) O operador linear $S : P_n \to P_n$ do espaço dos polinômios P_n em uma variável real de grau menor ou igual a n, $n \geq 1$, definido por $S(p)(x) = p(x) - xp'(x)$, é um isomorfismo.

Quantas dessas afirmativas são verdadeiras?

A uma
B duas
C três
[redacted] quatro
E cinco

Questão 13 [q13]. Seja $(G, \cdot)$ um grupo. Qual das seguintes afirmações é falsa?

A Todo subgrupo de G de índice 2 é normal.
B H é subgrupo normal de G se, e somente se, o conjunto das classes laterais à esquerda de H em G tem estrutura de grupo.
C Se G é abeliano, então todo subgrupo é normal.
[redacted] Se G é não-abeliano, então existe ao menos um subgrupo que não é normal.
E G tem ao menos um subgrupo normal.

Questão 14 [q14]. Sejam $(G, \cdot)$ um grupo e H, K subgrupos (distintos) de G de índice 2. Qual das seguintes alternativas é correta?

A $H \cap K$ é normal e $\mid G/(H \cap K) \mid > 4$.
[redacted] $H \cap K$ é normal e $G/(H \cap K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
C $H \cap K$ não é normal e o conjunto das classes laterais de $H \cap K$ em G tem 4 elementos.
D $H \cap K$ é normal e $G/(H \cap K) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
E todos as outras afirmações são falsas.

Questão 15 [q15]. Seja $G = \mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$ (observe que $2022 = 2 \times 3 \times 337$ onde 337 é um número primo). Considere as seguintes afirmações:

(i) Existe um homomorfismo sobrejetor $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(ii) Não existe um homomorfismo injetor $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to G$.

(iii) O grupo dos automorfismos de G tem 2×336 elementos.

(iv) O grupo dos automorfismos de G tem 3×336 elementos.

É correto dizer que

A são falsas (iii) e (iv).
B são verdadeiras (i) e (ii).
[redacted] são verdadeiras (i) e (iii).
D são verdadeiras (ii) e (iii).
E são falsas (i) e (iv).

Questão 16 [q16]. Sejam $p \in \mathbb{Z}$ um número primo, $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $B = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ o anel das funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Qual das seguintes aplicações não é um homomorfismo de anéis?

A $\varphi : \mathbb{Z} \to B$ definida por $\varphi(n) = n1$, onde 1 é a identidade multiplicativa de B.
B Para $a \in A$, $\varphi : A[T] \to A$ definida por $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i$.
[redacted] $\varphi : B \to B$ definida por $\varphi(f) = f'$, onde f' representa a derivada de f.
D $\varphi : A[T] \to A[T]$ definida por $\varphi(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^{ip}$.
E Para $a \in \mathbb{R}$, $\varphi : B \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(f) = f(a)$.

Questão 17 [q17]. Sejam A um anel comutativo com unidade e P um ideal maximal de A. Sejam (P, X) o ideal de $A[X]$ gerado pelo conjunto $P \cup \{X\}$ e $P[X]$ o ideal de $A[X]$ dos polinômios com coeficientes em P. Considere as seguintes afirmações:

(i) $P[X]$ é primo e $A[X]/P[X] \simeq (A/P)[X]$

(ii) $P[X]$ é maximal e $A[X]/P[X] \simeq A/P$

(iii) (P, X) é primo e $A[X]/(P, X) \simeq A/P$

(iv) $P[X] = (P, X)$ e $A[X]/P[X] \simeq (A/P)[X]$

É correto dizer que

A são falsas (ii) e (iii).
B são falsas (i) e (iv).
C são verdadeiras (i) e (iv).
D são verdadeiras (ii) e (iii).
[redacted] são verdadeiras (i) e (iii).

Questão 18 [q18]. Seja p um número primo e considere o subanel $A = \{a/b \in \mathbb{Q} : \mathrm{mdc}(a, b) = 1 \text{ e } p \nmid b\}$ de $\mathbb{Q}$. O conjunto $\mathfrak{m} = \{a/b \in A : p \mid a\}$ é um ideal de A. Considere as seguintes afirmações:

(i) A é local e $\mathfrak{m}$ é primo.

(ii) $\mathfrak{m}$ é maximal e $A/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(iii) A tem só dois ideais primos: (0) e $\mathfrak{m}$.

(iv) $\mathfrak{m}$ é maximal mas não é principal.

(v) A não é local e $\mathfrak{m}$ é maximal.

É correto dizer que

■ são verdadeiras (i), (ii) e (iii).

B são verdadeiras (ii) e (v).

C são verdadeiras (iii) e (iv).

D são falsas (i) e (iii).

E são falsas (ii) e (v).

[redacted]